

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס הסקה סטטיסטית. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר [www.gool.co.il](http://www.gool.co.il).



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול זה בול. בשבילך!**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.Gool.co.il](http://www.Gool.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©

## תוכן עניינים

3	פרק 1 - אמידה נקודתית.....
11	אומד נראות מקסימלית.....
44	פרק 2 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה).....
60	פרק 3 - רווח סמך לפרופורציה.....
67	פרק 4 - רווח סמך להפרש פרופורציות.....
70	פרק 5 - רווח סמך להפרש תוחלות ממדגמים בלתי תלויים.....
78	פרק 6 - רווח סמך לתוחלת ההפרש במדגם מזווג.....
81	פרק 7 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן.....
86	פרק 8 - רווח סמך ליחס שוניות.....
91	פרק 9 - תרגול מסכם ברווחי סמך.....
96	פרק 10 - בדיקת השערות כללית.....
104	פרק 11 - הלמה של נימון פירסון.....
111	פרק 12 - בדיקת השערות על פרמטרים.....
116	פרק 13 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע).....
148	פרק 14 - בדיקת השערות על פרופורציה.....
164	פרק 15 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות.....
168	פרק 16 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים.....
178	פרק 17 - בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים).....
184	פרק 18 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות.....
188	פרק 19 - בדיקת השערות על שוניות.....
200	פרק 20 - שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים.....

## פרק 1 - אמידה נקודתית

### אומד חסר הטיה

**רקע:**

- $\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ :  $E(\hat{\theta}) = \theta$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

המשתנה  $X$  הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

3	2	1	$X$
4 $\theta$	1-6 $\theta$	2 $\theta$	<b>הסתברות</b>

מעוניינים לאמוד את  $\theta$  על סמך שתי תצפיות מההתפלגות:  $X_1$  ו- $X_2$

א. הראו שהאומד  $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$  הוא אומד מוטב ל- $\theta$ .

- הטיה של אומד היא:  $E(\hat{\theta}) - \theta$ , כמובן שלאומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד  $T_1$ .

ג. תקנו את  $T_1$  כך שיהיה אומד חסר הטיה.

- אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא:  $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$ . האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג?

- אם  $\hat{\theta}$  אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אז  $g(\hat{\theta})$  יהיה אומד חסר הטיה עבור  $g(\theta)$  רק אם  $g$  תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל:  $P(X = 3)$ .

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} : \sigma^2 \quad \bullet \quad \text{אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה}$$

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של  $X$ .

תזכורות חשובות:

• אם  $Y = aX + b$  אזי:

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad E(Y) = aE(X) + b$$

• אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקרים אזי:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

### תרגילים:

1. הציון במבחן מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת  $\mu$  וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת -  $\mu$ , נלקח מדגם של 5 ציונים  $X_1, \dots, X_5$ . שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציע:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציע:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציע:}$$

- א. איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?  
 ב. הצע תיקון לאומד המוטה כך שיהיה חסר הטיה.  
 ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי ההטיה.  
 ד. איזה מבין שני האומדים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

2. כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של  $2n$  נשים. נסמן את שונות הגובה ב-  $\sigma^2$ . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

- א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.  
 ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3.  $X \sim B(n, p)$  כלומר  $X$  הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר  $P$  (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל  $n$ .  
 א. פתחו אומד חסר הטיה ל- $P$ .  
 ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד.  
 ג. מהו אומד חסר הטיה ל-  $E(X)$ .  
 ד. מצאו אומד חסר הטיה ל-  $E(X^2)$ .

4. בתיק מניות שתי מניות . מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר פרמטר לא ידוע  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2$ .

פונקציית ההסתברות של  $X$  – מספר המניות שיעלו ביום מסוים :

$$P(X=0) = 1 - \frac{\theta}{2} \quad P(X=1) = \frac{\theta}{3} \quad P(X=2) = \frac{\theta}{6}$$

- א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- $\theta$  שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.  
 ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- $\theta$  שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום במשך שלושה ימים  $X_1, X_2, X_3$  (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5. בקרב המטפלות בת"א מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מיקרי בעל התפלגות התלויה

בפרמטר  $\theta$  באופן הבא :

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחד בלבד הוא  $3\theta$ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא  $1 - 4\theta$ ,

הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא  $\theta$ .

- במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.  
 א. מצא אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  על סמך תצפית בודדת.  
 ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  על סמך 4 תצפיות.  
 ג. מהו האומדן לפרמטר  $\theta$  על סמך תוצאות המדגם.  
 ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.  
 ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א. חשבו אומדנים.

6. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות :

- א. אם  $T$  הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר  $\theta$ , אז  $5T$  אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר  $5\theta$ .  
 ב. אם  $T$  הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר  $\theta$ , אז  $T^2$  אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר  $\theta^2$ .

7. במפעל שתי מכונות המייצרות מוצרים. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא  $p$ , מכונה השנייה ההסתברות שמכשיר תקין היא  $2p$ . דוגמים 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב-  $X$  את מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה,  $Y$  - מספר המכשירים התקינים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל-  $p$  ?

א.  $\frac{X}{20}$

ב.  $\frac{Y}{20}$

ג.  $\frac{X+Y}{60}$

ד.  $\frac{2X+Y}{80}$

8. יהי  $T_1$  ו-  $T_2$  אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר  $\theta$ .

א. מצא אומד חסר הטיה ל-  $\theta^2$  המתבסס על  $T_1$  ו-  $T_2$ .

ב. מצא אומד חסר הטיה ל-  $\theta(1-\theta)$  המתבסס על  $T_1$  ו-  $T_2$ .

9. נתון ש  $X$  הינו משתנה מקרי עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ . נדגמו  $n$  תצפיות בלתי תלויים

מאותה

אוכלוסייה.

א. הראה ש  $\sum_{i=1}^n p_i x_i$  אומד חסר הטיה ל  $\mu$  כאשר  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות  $X_1 \cdot X_2$  הראה שהוא אומד חסרי הטיה ל-

$\mu^2$ .

10.  $X_i \sim N(\mu, 1)$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, n$

נתון שהתצפיות הינן בלתי תלויות זו בזו. מצא אומד חסר הטיה ל-  $\mu^2$ .

11. נתונות  $n$  תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות בעלת הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 + \beta x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{ת אחר} \end{cases}$$

א. הראה כי האומד  $3\bar{X}$  הנו אומד בלתי מוטה ל  $\beta$ .

ב. מצא את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  הינם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים בעל פונקצית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} X \cdot A & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{ת אחר} \end{cases}$$

א. בטא את ערכו של  $A$  באמצעות  $\theta$  כדי שפונקצית הצפיפות תהיה לגיטימית.

ב. מצא אומד חסר הטיה ל- $\theta$  על סמך  $n$  התצפיות.



**פתרונות:****שאלה 1**

א.  $T_2$  ו-  $T_1$

ב.  $\frac{2}{3}T_3$

ג.  $T_2 = 110 T_1 = 76.6$

ד.  $T_1$

**שאלה 2**

ב.  $T_2$

**שאלה 3**

א.  $\frac{x}{n}$

ב.  $1 - \frac{x}{n}$

ג.  $x$

**שאלה 4**

א.  $\frac{3x}{2}$

ב.  $\frac{3\bar{x}}{2}$

**שאלה 5**

א.  $1 - \frac{x}{2}$

ג. 0.125

ה. לשונות 0.917

**שאלה 6**

א. נכון.

ב. לא נכון.

**שאלה 7**

תשובה: ב

**שאלה 8**

א.  $T_1 \cdot T_2$

ב.  $T_1 - T_1 \cdot T_2$

**שאלה 9**

הוכחה

**שאלה 10**

$$\bar{X}^2 - \frac{1}{n}$$

**שאלה 11**

ב.  $V(3\bar{X}) = \frac{3 - \beta^2}{n}$

**שאלה 12**

א.  $A = \frac{2}{\theta^2}$

ב.  $\theta = \frac{3}{2} \bar{X}$

## אומד נראות מקסימלית

### רקע

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש  $X$  משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות  $P(x, \theta)$ , כאשר  $\theta$  הפרמטר הבלתי ידוע.

יהי  $X_1, X_2, \dots, X_n$  תוצאות מדגם מקרי בגודל  $n$  הנלקח מאוכלוסייה זו.

נבנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם ולא את הפרמטר קוראים לפונקציית הנראות שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגדיר את פונקציית הנראות:

$$L(\theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta)$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של  $\theta$ ) כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכולי, כלומר המשמעות של פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש  $\theta$ .

אם מדובר במשתנה רציף נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות:

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא  $p$  (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו. הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי. השחקן חוזר על התהליך שוב והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.

מצאו את פונקציית הנראות של  $p$ .

אומד נראות מקסימלית עבור  $\theta$  הוא האומד  $\hat{\theta}$  שממקסם את פונקציית הנראות  $L(\theta)$ , כלומר, אנו מחפשים את האומד שיגרום לכך שהמדגם המקרי שקבלנו יהיה כמה שיותר סביר.

### שלב 1: למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המדגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המדגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנחקר).
- מוצאים מקסימום לפונקציית הנראות (לעיתים כדאי להוסיף  $\ln$  כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור  $p$ .

משפט: אם  $\hat{\theta}$  הוא אומד נראות מקסימלית עבור  $\theta$ , אזי  $g(\hat{\theta})$  הוא אומד נראות מקסימלית עבור  $g(\theta)$  בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינווריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו את אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקן הכדורסל לקלוע לסל פעמיים ברצף.

### תרגילים:

1. הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא  $p$  (לא ידוע). השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה. נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
  - א. חשבו את פונקציית הנראות של  $p$  וציירו גרף שלה.
  - ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור  $p$ .
  - ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $p$  אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים עד אשר ניצח.
  
2. מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של  $\lambda$  לקוחות ביום.
  - א. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $\lambda$  על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
  - ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\lambda$  על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב-  $n$  ימים מסוימים.
  
3. הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר  $\lambda$ . דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם. התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 5, 7 ו-3.
  - א. פתחו אומדן נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך  $n$  תצפיות כלשהן.
  - ב. מהו האומדן לפרמטר?
  
4. משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער ביום אחד מתפלג אחיד  $U(0, \theta)$ . כדי לאמוד את  $\theta$ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי בית באותו יום.
  - א. אלעד הכין ביום מסוים שיעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של  $\theta$  המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
  - ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\theta$  על סמך התצפית.
  - ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1, 3, 1.5. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל-  $\theta$  על סמך המדגם הזה.
  - ד. מצאו באופן כללי אומדן נראות מקסימלית ל-  $\theta$  על סמך מדגם של  $n$  בני נוער -  $X_1, \dots, X_n$ .

5. הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות  $\sigma^2$  לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מדגם  $X_1, \dots, X_n$  מ תצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 174, 165, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6. פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר P בהתפלגות הבינומית על סמך מדגם בגודל n בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7. X הוא משתנה מקרי בעל פונקצית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\theta$  על סמך n תצפיות בלתי תלויות:  $X_1, \dots, X_n$ .

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- $\theta^2$ .

8. בכד א 10 כדורים שחורים ו 10 לבנים בכד ב 5 כדורים שחורים ו- 15 לבנים. דוגמים באקראי כדור אך אינך יודע מאיזה כד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9. הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

10. מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מיקרי  $X$  בעל התפלגות התלויה בפרמטר  $\theta$  באופן הבא:

2	1	0	X
$1 - 4\theta + 4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$4\theta^2$	P(X)

- בחישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 1, 0, 0, 0 לקוחות ממתינים בתור.  
 א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר  $\theta$  על-סמך המדגם הנתון.  
 ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11. אדם מחזיק בידו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן שהסיכוי בו לתוצאה עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את ההוגן או זה שאינו הוגן.

- א. מצא אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסוג המטבע שהוטל.  
 ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12. מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש 4 מהם מובטלים.

- א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.  
 ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה  
 ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

13. במשחק מחשב שלוש רמות משחק :

ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.

ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.

ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.

יוסי בחר ברמה מסוימת אך אינו יודע איזו רמה הוא בחר. הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. הציעו א.נ.מ. לרמה של המשחק שיוסי שיחק על סמך מספר הפעמים שסיים את משחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.נ.מ. לסיכוי שמתוך שני משחקים הוא יצליח בדיוק משחק אחד?

14.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  מתפלגים אחיד בקטע  $[-\theta, \theta]$  מצא אומד נראות מקסימלית לפרמטר

$\theta$ .

15.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  מתפלגים בדיד לפי פונקציה ההסתברות הבאה :

$$P(X = k) = \frac{\binom{2}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{2-k}}{1 - (1-P)^2} \quad K = 1, 2$$

הוכח שא.נ.מ. ל-  $P$  הינו:  $2 - \frac{2}{\bar{X}}$



16. במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ת זו בזו והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקה לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא  $P$ . כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר חודש נמצא של 30 מהם עדיין פועלים.

א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור  $P$ .

ב. רשמו את האומדן שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של  $n$  מכשירים שמתוכם נמצאו  $Y$  מכשירים שעדיין פועלים לאחר חודש אחד.

ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי עם פי צפיפות

$$f(t) = \theta e^{-\theta t} \quad \text{עבור } t > 0$$

מצא א.נ.מ. עבור  $\theta$  המבוסס על  $Y$ . מהו האומדן המתאים מן המדגם הנתון?

17. חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אות אחת לשתי דקות. אם לאחר 20 דקות (10

אותות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדיין תפוס-החיוג האוטומטי נפסק.

א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה  $X$  - מספר הפעמים שהחייגן האוטומטי

מחייג למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של

אות חיוג הוא  $P$ .

ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו

התוצאות הבאות : בשני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם

הצלח המטלפן להשיג את המספר המבוקש, מספר החיוגים האוטומטיים עד לקבל צליל

"פנוי" היו :

5,1,2,2,8,3,7,2,6,1

מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור  $P$  על סמך התוצאות שהתקבלו.

פתרונות :שאלה 1

ב. 0.5

ג.  $\frac{2}{9}$ שאלה 2א.  $X$ ב.  $\bar{X}$ שאלה 3א.  $\frac{1}{\bar{X}}$ ב.  $\frac{2}{9}$ שאלה 4

א. 1

ג. 3

ד.  $X_{\max}$ שאלה 5א.  $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n}$ 

ב. 40.2

שאלה 6 $\frac{x}{n}$ שאלה 7א.  $\frac{n}{\sum X_i^2}$ ב.  $(\frac{n}{\sum X_i^2})^2$

**שאלה 8**

ב. כד א

**שאלה 9**

א. 32

ב. 0.3916

**שאלה 10**

א. 0.45

ב. 0.81

**שאלה 11**

ב. הוגן

**שאלה 12**

א. 0.08

ב. 0.92

ג. 11.5

**שאלה 13**

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 3 & X = 0,1 \\ 1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

ב. 1

$$\hat{p} = \begin{cases} 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 & X = 0,1 \\ 2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

**שאלה 14** $\max |X_i|$ **שאלה 15**

הוכחה

**שאלה 16**

א. 0.6124

ב.  $\hat{p} = \sqrt{\frac{y}{n}}$

ג. 0.49

**שאלה 17**

ב. 0.1818

## נספח

### התפלגויות רציפות

התפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההתפלגות המצטברת	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$		$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	הזמן עד להתרחשות מאורע מסוים. $\lambda$ - הוא ממוצע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	$\mu$	$\sigma^2$	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	$\hat{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

**התפלגויות בדידות**

אנ"מ	הערות	שונות	תוחלת	פונקציית ההסתברות $P(X=k)$	ההתפלגות
$\hat{p} = \frac{Y}{n}$	מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת.  p - ההסתברות להצלחה	$np(1-p)$	$np$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	בינומית $B(n, p)$ $0 \leq p \leq 1$
$\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$	מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת,  p - ההסתברות להצלחה	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$	$(1-p)^{k-1} p$ $k = 1, 2, \dots, \infty$	גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \leq 1$
$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$	בחירה אקראית של מספר בין a ו-b.	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{b-a+1}$  $K=a, \dots, b$	אחידה $U(a, b)$
$\hat{\lambda} = \bar{X}$	מספר אירועים ביחידת זמן  λ - קצב האירועים	$\lambda$	$\lambda$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, \infty$	פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$

## קריטריון MSE - תוחלת ריבוע הטעות

### רקע

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומדן הוא קריטריון MSE. תוחלת ריבוע טעות האמידה.

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$V(\hat{\theta})$  - הינה שונות האומדן.

$E(\hat{\theta}) - \theta$  - הינה ההטיה של האומדן.

אם  $T_1$  ו-  $T_2$  הינם אומדים לפרמטר  $\theta$ . האומדן העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר כלומר, אם

$$MSE(T_1) > MSE(T_2) \text{ עדיף על } T_1.$$

### דוגמה: (הפתרון בהקלטה)

נתון משתנה  $X$  המתפלג אחיד רציף באופן הבא:  $X \sim U(3, \theta)$ . מוצעים שני אומדים לפרמטר  $\theta$

$$T_1 = 2X - 3 \text{ ו- } T_2 = \frac{3X - 3}{2}$$

איזה אומדן עדיף לאמידת הפרמטר  $\theta$ ?

### תרגילים :

1. מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות. לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE) איזה אומד עדיף? הסבירו.

2. בעיר מסוימת בשוויץ בכל  $\theta$  דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת  $X$ .

א. הצע אומד חסר הטיה ל-  $\theta$  על סמך  $X$ .

ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את  $\theta$  על סמך האומד:  $1.5X$  האם האומד הנ"ל מוטה?

ג. איזה אומד מבין האומדים של סעיף א או ב עדיף?

3. חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן הפרמטר  $P$ ). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים ומתבונן בסטטיסטי  $X$  מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט

$$\text{בין שני אומדים: } T_1 = \frac{X}{5} \text{ ו- } T_2 = \frac{X+1}{7}$$

א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?

ב. מי מבין האומדים עדיף אם  $P=0.5$ ?

ג. מי מבין האומדים עדיף אם  $P=0.1$ ?

4. מספר השריפות המתרחשות בחודש אוקטובר בארץ מתפלג פואסונית עם תוחלת  $\lambda$ . נלקח מדגם של 10 חודשי אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^5 X_i + 2 \cdot \sum_{i=6}^{10} X_i}{10}$$

$X_i$  = מספר השריפות בחודש אוקטובר ה- $i$ .

איזה מהאומדים עדיף לצורך אמידת הפרמטר  $\lambda$ ?

5. הוכח ש:  $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$



**פתרונות :****שאלה 1**

זה עם השלוש תצפיות.

**שאלה 2**

א.  $2x$

ג. סעיף ב

**שאלה 3**

א.  $T_1$

ב.  $T_2$

ג.  $T_1$

**שאלה 5**

הוכחה

**שיטת המומנטים****רקע:**

מומנט מסדר ראשון של משתנה  $X$  מוגדר להיות :  $E(X)$

מומנט מסדר שני של משתנה  $X$  מוגדר להיות :  $E(X^2)$

באופן כללי, מומנט מסדר  $r$  מוגדר להיות :  $E(X^r)$

מומנט מסדר ראשון של  $n$  תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות :  $\frac{\sum X_i}{n}$  - זהו מומנט מסדר ראשון של המדגם.

מומנט מסדר שני של  $n$  תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות :  $\frac{\sum X_i^2}{n}$  - זהו המומנט מסדר שני של המדגם.

באופן כללי, מומנט מסדר  $r$  של  $n$  תצפיות בלתי תלויות מאותה התפלגות מוגדר להיות :  $\frac{\sum X_i^r}{n}$  - זהו מומנט ה- $r$  של המדגם.

השיטה : משווים את המומנט המתאים של ההתפלגות לפי המומנט המתאים של המדגם.

**דוגמה: (פתרון בהקלטה)**

נגיד שמספר הפעמים שאדם מתעטש ביום מתפלג פואסונית על ידי פרמטר  $\lambda$  (קצב ההתעטשויות ביום). רוצים לאמוד את  $\lambda$  בשיטת המומנטים.

תרגילים:

1.  $X$  מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי  $a$  לערך המכסימלי 20 מצא אומד לערך מינימלי  $a$  לפי שיטת המומנטים על סמך  $n$  תצפיות מההתפלגות.
2. דוגמים  $n$  תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא  $\mu$  והשונות שלה היא  $\sigma^2$  מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.
3. אדם מטיל מטבע רגיל  $n$  פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך  $X$  - מספר העצים שהוא קיבל.
- א. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-  $n$  על סמך  $X$  בודד.
- ב. מצא אומד בשיטת המומנטים ל-  $n$  על סמך חזרה של  $m$  פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן  $n$  פעמים.
- ג. מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים : פעם אחת קיבל 5 עצים , בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.
4. נתון ש  $X_i \sim \exp(\lambda)$  מצא אומד בשיטת המומנטים לפרמטר  $\lambda$  על סמך מדגם של  $n$  תצפיות.
5. נתונה פונקצית הצפיפות הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta-1} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחר } t \end{cases}$$

- א. בטא את  $E(X)$  כפונקציה של הפרמטר  $\theta$ .
- ב. מצא אומד ל-  $\theta$  על פי שיטת המומנטים.

6. הזמן בדקות להכנת לחם במאפייה מתפלג באופן הבא :  $X_i \square N(10, \sigma^2)$

במדגם של הכנת ארבעה לחמים התקבלו התוצאות הבאות : 4,6,10,5 .

א. אמוד את  $\sigma^2$  בשיטת המומנטים על סמך מדגם בגודל n.

ב. מצא את האומדן ל  $\sigma^2$  . מה הבעייתיות בתשובה?

**פתרונות :****שאלה 1**

$$2(\bar{X} - 10)$$

**שאלה 3**

$$\text{א. } 2X$$

$$\text{ב. } 2\bar{X}$$

$$\text{ג. } 10\frac{2}{3}$$

**שאלה 4**

$$\frac{1}{\bar{X}}$$

**שאלה 5**

$$\text{א. } \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\text{ב. } \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

**שאלה 6**

$$\text{א. } \frac{\sum X_i^2}{n} - 100$$

$$\text{ב. } -55.75$$

**אומד עקיב****רקע :**

יהי  $\hat{\theta}_n$  אומד לפרמטר  $\theta$  המתבסס על  $n$  תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב אם יתקיים ש:  $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$ .

- אם  $\hat{\theta}_n$  אומד חסר הטיה לפרמטר  $\theta$  ומתקיים ש:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$$

אזי  $\hat{\theta}_n$  אומד עקיב ל- $\theta$ .

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

הסבר מדוע  $\bar{X}$  אומד עקיב ל- $\mu$ .

- אם  $\hat{\theta}_n$  אומד נראות מקסימלית לפרמטר  $\theta$  מתקיים ש:  $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$ .

כלומר,  $\hat{\theta}_n$  אומד עקיב ל- $\theta$ .

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

הסבר מדוע בהתפלגות גיאומטרית  $\frac{1}{X}$  אומר עקיב לפרמטר  $P$ .

**תרגילים:**

1. נתון כי  $X_i \sim U(0, \theta)$  כאשר  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $2\bar{X}$  מוצע להיות האומד ל- $\theta$ .
  - א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.
  - ב. הסבר מדוע האומד הינו עקיב.
  
2. נתון ש  $X \sim B(n, p)$  כמו כן נתון האומד ש  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  הינו אומד ל- $p$ . הוכח שאומד זה הינו אומד עקיב ל- $p$ .
  
3. אורך חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב  $\lambda$  לשנה.
 

נגדיר את  $W_1, W_2, \dots, W_n$  סדרת זמנים בשנים של  $n$  נורות בלתי תלויות.

  - א. מהו אומד נראות המקסימלי עבור  $\lambda$ ? האם האומד עקיב?
  - ב. מצא אומד עקיב לסיכוי שנורה כלשהי תישרף תוך פחות משנתיים?
  
4. נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .
 

מצא אומד עקיב לפרמטר  $\sigma^2$  המתבסס על  $n$  תצפיות בלתי תלויות.

**פתרונות :****שאלה 1 :**

הוכחה.

**שאלה 2 :**

הוכחה.

**שאלה 3 :**

$$\frac{1}{\bar{W}} \cdot \lambda$$

$$\text{ב. } 1 - e^{-\frac{2}{\bar{W}}}$$

**שאלה 4 :**

$$\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}$$



**אומד חסר הטיה יעיל ביותר - MVUE**  
(Minimum- variance unbiased estimator)

**רקע:**

T יהיה MVUE אם מתקיים ש-T אומד חסר הטיה ל- $\theta$ , ובנוסף מתקיים ש:  $V(T) \leq V(\hat{\theta})$  לכל  $\hat{\theta}$  חסר הטיה אחר.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

לרשת חנויות ישנם שני סניפים. מספר הלקוחות הנכנסים לכל סניף ביום מתפלג פואסונית עם קצב של  $\lambda$  בסניף A וקצב של  $2\lambda$  בסניף B. נדגמו  $n$  ימים מכל סניף ונבדק בכל יום:

$X_i$  - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף A ביום  $i$ .

$Y_j$  - מספר הלקוחות שנכנסו לסניף B ביום  $j$ .

על מנת לאמוד את  $\lambda$  מוצע האומד:  $\alpha \bar{X} + \beta \bar{Y}$ .

א. מה התנאי שצריך להתקיים על  $\alpha$  ו- $\beta$  כדי שהאומד יהיה חסר הטיה?

ב. מה צריך להיות  $\alpha$  ו- $\beta$  כדי שהאומד יהיה גם בעל שונות מינימלית?

**תרגילים:**

1.  $T_1$  ו- $T_2$  הינם אומדים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר  $\theta$ .

$$T = aT_1 + bT_2 : \text{ כמו כן נגדיר}$$

א. מה צריך להיות התנאי על  $a$  ו- $b$  כדי ש- $T$  יהיה אומד חסר הטיה?

ב.  $\sigma_1^2$  ו- $\sigma_2^2$  הם השונות של  $T_1$  ו- $T_2$  בהתאמה. מצאו את  $a$  ו- $b$  כך ש- $T$  יהיה אומד חסר הטיה ל  $\theta$  ובעל שונות מינימלית.

2. במפעל 3 מכונות המייצרות את אותו חלק. תוחלת הקוטר של החלקים המיוצרים בכל מכונה זהה אומנם השונות של כל מכונה שונות ומקיימות:

$$\sigma_2^2 = 2\sigma_1^2 \quad \sigma_3^2 = 3\sigma_1^2$$

הוחלט לדגום  $n$  חלקים מכל מכונה ולחשב את ממוצע הקוטר המתקבל.

$\bar{X}_i$  - יהיה הממוצע המתקבל במכונה  $i$ .

יהי  $W = \sum_{i=1}^3 a_i \bar{X}_i$  האומד לתוחלת קוטר החלקים המיוצרים על ידי מכונה כלשהי.

א. מה התנאי שצריך להתקיים על המשקלים  $a_i$  כדי שהאומד המוצע יהיה בלתי מוטה?

ב. נניח ש  $a_1 = a_2$ . מה במקרה זה המשקלים המביאים את האומד להיות MVUE?

**פתרונות :****שאלה 1:**

$$a + b = 1. \text{א.}$$

$$b = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \text{ב.}$$

**שאלה 2:**

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 1. \text{א.}$$

$$a_1 = a_2 = 0.4 \quad \text{ב.}$$

$$a_3 = 0.2$$

## שאלות מסכמות באמידה נקודתית

### תרגילים:

1. במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא  $P$ , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא  $P^2$  ובמכונה השלישית הסיכוי הוא  $2P$ . דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה. נסמן ב- $X$  את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה א. נסמן ב- $Y$  את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה וב- $Z$  את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
- א. מהם הערכים האפשריים של הפרמטר  $P$ ?
- ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר  $P$  על סמך  $X$  ו- $Z$ .
- ג. אם התקבל ש- $Y=3$ ,  $X=6$  מהו אומדן נראות מקסימלית ל- $P$ ?
2. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של  $\lambda$  תאונות בחודש. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של  $2\lambda$  תאונות בחודש. הוחלט לספור את מספר התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
- א. נסמן ב- $X$  את מספר התאונות בחודש בקטע א' ו ב- $Y$  בקטע ב'. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר  $\lambda$  על סמך  $X$  ו- $Y$ .
- ב. מצאו אומד נראות מקסימלית לסיכוי שבקטע כביש א תהיה לפחות תאונה אחת בחודש?
- ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- $\lambda$ ?
3. זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלית עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.
- א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
- ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
- ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

4. בקזינו משחק בו 4 תאים ממוספרים מ 1 עד 4. מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.

יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון:  $P$ .  
א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר  $P$ .

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב. מצאו אומדן ל- $P$  על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.

ג. מצאו אומדן חסר הטיה ל- $P$  מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

5. יהי  $X_1, X_2, \dots, X_n$  מדגם מקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1}, & 0 < x < \lambda, \theta > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

א. מצא אחי"ה ל- $\lambda$  (כאשר  $\theta$  קבוע ידוע).

ב. מצא אחי"ה ל- $\theta$  (כאשר  $\lambda$  קבוע ידוע).

ג. מצא אחי"ה ל- $\lambda$  (כאשר  $\theta$  קבוע ידוע).

6.  $X$ -משך זמן הפרסומות בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום  $(0, \theta)$

$Y$ -משך זמן הפרסומות בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום  $(0, 2\theta)$

א. מצא אומדן חסר הטיה ל- $\theta$  המשתמש במשך זמן אקראי של פרסומת בודדת בערוץ 2 ופרסומת בודדת בערוץ 10.

ב. מוצע האומדן  $T_2 = X + 0.5Y$ , האם האומדן הנ"ל הוא חסר הטיה?

ג. איזה אומדן יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב?

ד. מצא אומדן נראות מקסימלית ל- $\theta$  על סמך  $X$ -ו- $Y$ .

7. נדגמו 2 תצפיות  $(X_1, X_2)$  בלתי תלויות מהתפלגויות אחידות רציפות התלויות בפרמטר  $\theta$ .

ידוע כי  $X_1 \sim U(0, \theta)$  ;  $X_2 \sim U(0, a\theta)$  (כאשר  $a$  קבוע ידוע וחיובי).

א. מצא אנ"מ ל-  $\theta$  על סמך 2 התצפיות הנ"ל.

ב. חשב את תוחלת ושונות האנ"מ מסעיף א'. האם האנ"מ מוטה?

ג. מצא אח"ה ל-  $\theta$  על סמך סכומן של 2 התצפיות הנ"ל. מהי שונותו?

פתרונות:שאלה 1:

א.  $0 \leq P \leq 0.5$

ג. 0.345

שאלה 2:

א.  $\frac{x+y}{3}$

ג. כן

שאלה 4:

א.  $0 \leq P \leq \frac{1}{3}$

ב.  $\frac{1}{3}$

ג. 0.389

**שאלה 5:**

$$\hat{\lambda} = \frac{\theta+1}{\theta} \bar{x} \quad \text{א. אחייה יהיה}$$

ב.

$$\hat{\theta} = \frac{n}{n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\hat{\lambda} = X_{\max} \quad \text{ג.}$$

**שאלה 7:**

$$\hat{\theta} = \max\left(X_1, \frac{X_2}{a}\right) \quad \text{א.}$$

$$E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3} \theta$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{18} \theta^2 \quad \text{ב.}$$

$$\tilde{\theta} = \left(\frac{2}{1+a}\right)(X_1 + X_2) \quad \text{ג.}$$



## נספח : אומדי נראות מכסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות

### מודל בינומי

נתון מדגם של משתנה בינומי  $X \sim B(n, p)$ .

א.נ.מ עבור  $p$  הוא  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  והוא גם א.ח.ה.

### מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים אחידים  $X_i \sim U(1, N)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $N$  הוא  $\hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  ואינו א.ח.ה.

### מודל פואסוני

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים פואסוניים  $X_i \sim P(\lambda)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\lambda$  הוא  $\hat{\lambda} = \bar{X}$  וגם א.ח.ה.

### מודל גיאומטרי

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים גיאומטריים  $X_i \sim G(p)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $p$  הוא  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$  אינו א.ח.ה. וא.נ.מ עבור התוחלת  $\frac{1}{p}$  הוא  $\bar{X}$  והנו א.ח.ה.

## מודל נורמלי

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים נורמליים  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\mu$  הוא  $\hat{\mu} = \bar{X}$

כאשר  $\mu$  ידוע א.נ.מ עבור  $\sigma^2$  הוא  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  (אומד חסר-הטייה)

כאשר  $\mu$  לא-ידוע א.נ.מ עבור  $\sigma^2$  הוא  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  (אומד מוטה!!!)

אומד חסר-הטייה עבור  $\sigma^2$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

## מודל מעריכי

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים מעריכיים  $X_i \sim \exp(\theta)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\theta$  הוא  $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$  -מהווה אומד מוטה. וא.נ.מ עבור התוחלת  $\frac{1}{\theta}$  הוא  $\bar{X}$  א.ח.ה.

## מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם  $X_1, X_2, \dots, X_n$  של משתנים אחידים  $X_i \sim U(0, \theta)$  בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור  $\theta$  הוא  $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$  אינו א.ח.ה.

**בכל התפלגות:**

א.ח.ה עבור  $\mu$  הוא  $\hat{\mu} = \bar{X}$

אומד חסר-הטיה עבור  $\sigma^2$  :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad \text{כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

## פרק 2 - רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה)

### רווח סמך כששונות האוכלוסייה ידועה

#### רקע:

ממוצע המדגם הוא אומדן לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיוק כמו הממוצע האמתי הוא אפסי. מה שנהוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה זה לבנות רווח סמך. נבנה מרווח בטחון שהסיכוי שהפרמטר  $\mu$  ייכלל בתוכו הוא  $1-\alpha$ .

$1-\alpha$  : נקרא רמת בטחון או רמת סמך.

כך ש:  $P(A \leq \mu \leq B) = 1 - \alpha$

A - גבול התחתון של רווח הסמך

B - הגבול העליון של רווח הסמך

$L = B - A$  - אורך רווח הסמך

#### דוגמה : (פתרון בהקלטה)

חוקר דגם 25 חיילים שנבחנו במבחן הפסיכומטרי. הוא בנה רווח סמך לממוצע הציונים במבחן הפסיכומטרי בקרב אוכלוסיית החיילים וקיבל בין 510 ל-590. רווח הסמך נבנה ברמת סמך של 95%.

מהי אוכלוסיית המחקר?

מה המשתנה באוכלוסייה?

מה הפרמטר שהחוקר רצה לאמוד?

מהו רווח הסמך?

מה אורך רווח הסמך?

מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רווח סמך לתוחלת (  $\mu$  ) במקרה ש  $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה

הפרמטר שנרצה לאמוד :  $\mu$

האומד נקודתי :  $\bar{x}$

התנאים לבניית רווח הסמך :

$$1 \quad X \sim N \quad \text{או} \quad n \geq 30$$

2  $\sigma^2$  (שוונות האוכלוסייה) ידועה

הנוסחה לרווח הסמך :

$$\bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

על פי נתוני היצרן אורך חיי סוללה מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 1 שעה.

מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה.

נדגמו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות.

בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

שגיאת האמידה המקסימלית:

$$\varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\varepsilon$ -נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרא גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה : (פתרון בהקלטה)

בהמשך לשאלה עם הסוללות . מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברווח הסמך:

- אורך רווח הסמך הוא פעמיים שגיאת האמידה המקסימלית :  $L = 2\varepsilon$ .
- ממוצע המדגם נופל תמיד באמצע רווח הסמך :  $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$
- ככל שמספר התצפיות ( $n$ ) גבוה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומדן יותר מדויק, ולכן נקבל רווח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון  $(1-\alpha)$  גבוהה יותר כך  $z_{1-\alpha/2}$  יותר גבוה, ורווח הסמך יותר ארוך.

### תרגילים :

1. חוקר התעניין לאמוד את השכר הממוצע במשק. על סמך מדגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר הממוצע במשק נע בין 9200 ל-9800.
  - א. מי האוכלוסייה במחקר?
  - ב. מה המשתנה הנחקר?
  - ג. מה הפרמטר שאותו רוצים לאמוד?
  - ד. מה רווח הסמך לפרמטר?
  - ה. מהי רמת הסמך לפרמטר?
  - ו. מה אורך רווח הסמך?
  - ז. מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
  
2. מעוניינים לאמוד את התפוקה היומית הממוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. במדגם אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שסטיית התקן האמתית ידועה ושווה 150 מוצרים ביום. בנה את רווח הסמך.
  
3. מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
  - ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
  
4. דגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר הממוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שסטיית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת השכר במשק.
  - ב. מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לתוחלת השכר?
  - ג. מה היה צריך להיות גודל המדגם אם הינו רוצים להקטין את רווח הסמך ב-50%?
  - ד. אם היינו מגדילים את גודל המדגם ובונים רווח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרווח הסמך מכיל את הפרמטר?
  
5. בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (99,105). שחזרו את :
  - א. ממוצע המדגם.
  - ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
  - ג. רמת הסמך.

6. זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
- ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
- ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
7. חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $82 < \mu < 92$ .
- נתון שסטיית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדגם מתבסס על 16 תצפיות. התפלגות המשתנה היא נורמאלית.
- א. מהו ממוצע המדגם?
- ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
- ג. מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5 ?
8. חוקר בנה רווח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותם נתונים רווח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, מי מהמשפטים הבאים אינו יהיה נכון.
- א. אורך רווח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
- ב. גודל המדגם יהיה כעת קטן יותר.
- ג. המרחק בין ממוצע המדגם לקצות רווח הסמך יהיו קטנים יותר ברווח הסמך החדש.
- ד. רמת הביטחון לבנות רווח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.
9. חוקר בנה רווח סמך ל- $\mu$  וקיבל  $48 < \mu < 54$  מה נכון בהכרח:
- א.  $\mu = 51$
- ב.  $\bar{X} = 6$
- ג.  $\bar{X} = 51$
- ד. אורך רווח הסמך הינו 3.
10. איזה מהגורמים הבאים אינו משפיע על גודלו של רווח בר סמך, כאשר שונות האוכלוסייה ידועה? (בחר בתשובה הנכונה)
- א. רמת הביטחון.
- ב. סטיית התקן באוכלוסייה.
- ג. מספר המשתתפים.
- ד. סטיית התקן במדגם.



11. חוקר בנה רווח סמך לממוצע וקיבל את רווח הסמך הבא:  $63 < \mu < 83$ . נתון שסטיית התקן בהתפלגות הייתה ידועה לו ושהמדגם התבסס על 40 תצפיות. א. אם החוקר היה רוצה לבנות רווח סמך באורך 10. כמה תצפיות עליו היה לדגום? ב. רווח הסמך שנבנה על ידי החוקר היה ברמת סמך של 95%. בנה את רווח הסמך שהיה מתקבל ברמת סמך של 98%.

12. נתון משתנה מקרי רציף מתפלג אחיד:  $X_i \sim U(\mu - 0.5, \mu + 0.5)$ . נרצה לאמוד את  $\mu$ . מצאו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת-בטחון של 0.95 אם במדגם של 45 תצפיות התקבל:  $\bar{x} = 74$ .

$$(\text{Var}(X_i) = \frac{(b-a)^2}{12} : \text{תזכורת על השונות בהתפלגות אחידה רציפה})$$

פתרונות :שאלה 2

$$4920.6 < \mu < 4979.4$$

שאלה 3

$$א. \quad 223.42 < \mu < 236.58$$

$$ב. \quad 222.16 < \mu < 237.84$$

שאלה 5

$$א. \quad 102$$

$$ב. \quad 3$$

$$ג. \quad 0.9544$$

שאלה 6

$$א. \quad 83.5 < \mu < 4.42$$

ב. יקטן פי 2

ג. גדל

שאלה 7

$$א. \quad 87$$

$$ב. \quad 5$$

$$ג. \quad 0.9544$$

שאלה 8

$$א. \quad 139$$

$$ב. \quad 21 < \mu < 25$$

שאלה 9

התשובה היא : ב

שאלה 10

התשובה היא : ג

שאלה 11

התשובה היא : ד

### קביעת גודל מדגם באמידת תוחלת עם שונות אוכלוסייה ידועה

#### רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה:  $\sigma$   
 ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ושגיאת אמידה שלא תעלה על  $\varepsilon$  מסוים, נציב בנוסחה הבאה:

$$n \geq \left( \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

כדי להציב בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר יתפלג נורמלית או שהמדגם ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המדגם לממוצע האמיתי לא יעלה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87)

**תרגילים:**

1. משתנה מקרי מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?
2. מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבא. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמאלית על סטיית תקן של 3 פעימות לדקה.  
א. כמה מתגייסים יש לדגום?  
ב. אם ניקח מדגם הגדול פי 4 מהמדגם של סעיף א ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפיע על שגיאת האמידה?
3. יהי  $X$  משתנה מקרי עם ממוצע  $\mu$  וסטיית תקן  $\sigma$ . חוקר רוצה לבנות רווח בר סמך ל- $\mu$  ברמת ביטחון של 0.95 כך שהאורך של הרווח יהיה  $0.5\sigma$ . מהו גודל המדגם הנדרש?

**פתרונות :****שאלה 1**

780

**שאלה 2**

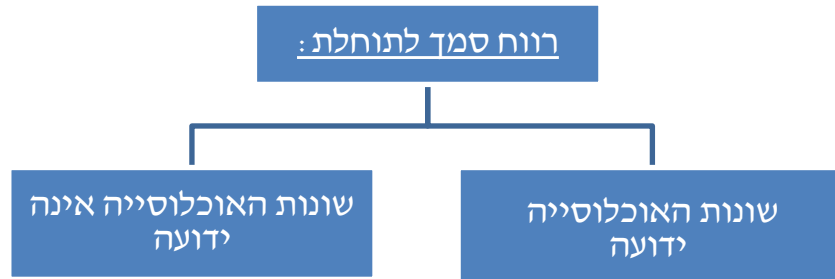
א. 139

ב. הדבר יקטין את  $\varepsilon$  פי 2.**שאלה 3** $n = 62$

## רווח סמך לתוחלת (ממוצע האוכלוסייה) כששונות האוכלוסייה אינה ידועה

רקע:

בבואנו לבנות רווח סמך לתוחלת אנו צריכים להתמקד בשני המצבים הבאים:



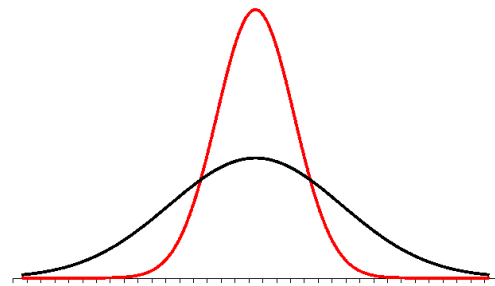
בפרק זה נעסוק במקרה ששונות האוכלוסייה ( $\sigma^2$ ) אינה ידועה לנו. מקרה יותר פרקטי.

התנאי:  $X \sim N$  או שהמדגם גדול

$$\text{רווח סמך: } \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1} : \text{האומד לשונות}$$

התפלגות T:



הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן  $df=n-1$ . ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

הזמן שלוקח לפתור שאלה מסוימת בחשבון מתפלג אצל תלמידי כיתות ח' נורמאלית.  
במטרה לאמוד את תוחלת זמן הפתרון נדגמו 4 תלמידים בכיתה ח'. להלן התוצאות שהתקבלו  
בדקות : 4.7, 5.2, 4.6, 5.3.  
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן הפתרון לשאלה בקרב תלמידי כיתה ח'.

**פתרון :**

$$4.39 < \mu < 5.51$$

### תרגילים:

1. מחקר מעוניין לדעת כיצד תרופה מסוימת משפיעה על קצב פעימות הלב. ל-5 אנשים שנטלו את התרופה מדדו את הדופק והתקבל מספר פעימות לדקה: 89, 79, 84, 88, 84. הערה: לצורך פתרון הנח שקצב פעימות הלב מתפלג נורמאלית בקירוב.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת הדופק של נוטלי התרופה הנ"ל.
  - ב. נתון שהדופק הממוצע ללא לקיחת התרופה הינו 70. לאור זאת, האם בביטחון של 95% התרופה משפיעה על הדופק?
  - ג. בהמשך לסעיף א, אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת ביטחון של 99% כיצד הדבר היה משפיע על רווח הסמך?
2. במדגם שנעשה על 25 מתגייסים לצבא האמריקאי התקבל כי: גובה ממוצע של חייל הינו 178 ס"מ עם סטיית תקן  $S=13$  ס"מ. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת גובה המתגייסים לצבא האמריקאי. מה יש להניח לצורך פתרון?
3. אדם מעוניין לאמוד את זמן הנסיעה הממוצע שלו לעבודה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שזמן הנסיעה בהם בדקות הוא: 27, 34, 32, 40, 30.
  - א. ברמת ביטחון של 95% אמוד את זמן הנסיעה הממוצע. מהי ההנחה הדרושה לצורך פתרון?
  - ב. איך גודל רווח הסמך היה משתנה אם היו דוגמים עוד ימים?
4. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלית. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 וסטיית תקן מדגמית 13.
  - א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסייה ברמת ביטחון של 95%.
  - ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הינה סטיית התקן האמתית של כלל הנבחנים.
  - ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
5. נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$ ,  $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.
6. נדגמו 120 אנשים אקראיים מעל גיל 50. עבור כל אדם נבדק מספר שנות השכלתו. להלן התוצאות שהתקבלו:  $\bar{x} = 13.8$ ,  $S = 2$ . בנו רווח סמך ברמת סמך של 96% לממוצע ההשכלה של אזרחים מעל גיל 50.



7. שני סטטיסטיקאים בנו רווח בר-סמך לאותו פרמטר  $\mu$ . לכל אחד מהסטטיסטיקאים מדגם אחר, אך באותו גודל 10. שניהם קבעו אותה רמת סמך.

סטטיסטיקאי א : הניח  $\sigma = 20$

סטטיסטיקאי ב : חישב לפי המדגם וקיבל  $S = 20$

למי משני הסטטיסטיקאים יהיה רווח סמך ארוך יותר? (בחר בתשובה הנכונה)

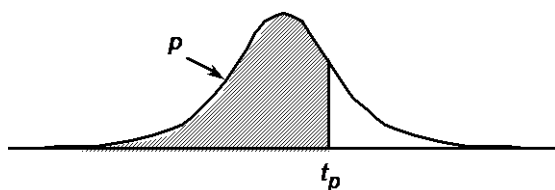
א. סטטיסטיקאי א

ב. סטטיסטיקאי ב

ג. אותו אורך רווח סמך לשני הסטטיסטיקאים.

ד. תלוי בתוצאות המדגם של כל סטטיסטיקאי.

8. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ביצעו מדגם בגודל 16 וקיבלו סטיית תקן מדגמית 10. אורך רווח הסמך שהתקבל הוא : 8.765. מהי רמת הביטחון של רווח הסמך?



P

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
$\infty$	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

**פתרונות:****שאלה 1**

$$א. \quad 79.88 < \mu < 89.72$$

**שאלה 4**

$$א. \quad 96.63 < \mu < 107.37$$

$$ב. \quad 96.90 < \mu < 107.10$$

**שאלה 5**

$$3.149 < \mu < 3.351$$

**שאלה 8**

90%

### פרק 3 - רווח סמך לפרופורציה

#### רקע:

מטרה: לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:  $\hat{p} = \frac{y}{n}$  (Y – מספר ההצלחות שבמדגם)

רווח הסמך ל P:  $\hat{p} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

התנאי לבנות את רווח הסמך הינו מדגם של לפחות 30 תצפיות (לעיתים נותנים תנאי של מספר הצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10)

האומד לטעות התקן:  $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

מתקיים ש:  $\hat{p} = \frac{A+B}{2}$   $L = 2\varepsilon$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

1. במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים. מתוכם התקבל ש 24 היו מובטלים.

א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסייה ברמת סמך של 95%.

ב. מהו האומד לטעות התקן?

#### פתרון:

א.  $7.5\% < p < 16.5\%$

ב. 2.29%

### תרגילים:

1. נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מתוכן נמצאו כבעלות ממי"ד.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממי"ד.
  - ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
  - ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממי"ד בפועל.
  
2. במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמאים.
  - א. בנו רווח סמך לפרופורציית אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי היי-טק).
  - ב. כיצד רווח הסמך של סעיף א' היה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
  - ג. כיצד רווח הסמך היה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגם?
  
3. במדגם של 400 נהגים התקבל רווח סמך לפרופורציית הנהגים החדשים:  $0.08 < p < 0.18$ 
  - א. כמה נהגים במדגם היו נהגים חדשים?
  - ב. מהי רמת הסמך של רווח הסמך שנבנה?
  
4. במסגרת מערכת הבחירות בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבור איזה מועמד יצביעו.
  - א. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של  $\pm 3\%$  מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?
  
5. במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
  - א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
  - ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לסיכוי שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישה לא נשואה?
  
6. ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורווח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%.
  - א. מהו גודל המדגם שנלקח?

**פתרונות:****שאלה 3**

א. 52

ב. 0.997

**שאלה 5**א.  $22.5\% < p < 30.9\%$ ב.  $45.91\% < p < 60.72\%$ **שאלה 6**

200

### קביעת גודל מדגם באמידת פרופורציה

#### רקע:

בפרק זה נדון איך קובעים גודל מדגם שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת:

החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצויה:  $1 - \alpha$ .

החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין:  $\varepsilon$  (או את אורך רווח הסמך).

$L = 2\varepsilon$  - אורך רווח הסמך.

$\varepsilon$  - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימאלי (הסטייה) בין הפרמטר ( $p$ ) לאומד ( $\hat{p}$ ).

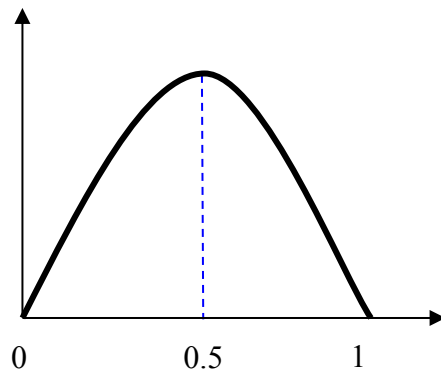
$$\varepsilon = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המדגם הרצוי לשם כך.

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין אנו יודעים את  $\hat{p}$ .

נתבונן בביטוי  $\hat{p}(1-\hat{p})$ :



כיוון שאין לנו ידע מוקדם על  $\hat{p}$  נציב את המקרה השמרני ביותר שממקסם את הביטוי עבור

$$\hat{p} = 0.5$$

$$n \geq \left( \frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right)^2 \Rightarrow n \geq \left( \frac{z_{1-\alpha/2}}{L} \right)^2$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

**דוגמה:** ( פתרון בהקלטה)

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.  
א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?  
ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שהאבטלה לא אמורה לעלות על 20%.

**פתרון:**

א. 423

ב. 271



### תרגילים:

1. הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
2. משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
  - א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רווח הסמך לא יעלה על 8%?
  - ב. חזרו על סעיף א. אם ידעו שלפני חמש שנים ל-80% מבתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש ליותר אינטרנט.
3. ערוץ טלוויזיה מעוניין לאמוד את הרייטינג של הערוץ בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסטייה המרבית בין האומדן לרייטינג האמתי לא תעלה על 4%.
  - א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
  - ב. לפי הערכה מוקדמת הרייטינג של הערוץ לא יכול לעלות על 20%. בהנחה ומכשיר כזה עולה 500 ₪ ליחידה מה החיסכון הכספי מאינפורמציה זאת?
4. השאלות הבאות מתייחסות לסעיף 4 :
  - א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז התמיכה בממשלה עם אורך רווח הסמך שלא עולה על 9% ברמת סמך של 90%?
  - ב. בהנחה ובוצע מדגם שאת גודלו חישובתם בסעיף א והתקבל שאחוז התמיכה בממשלה במדגם הנו 42%. בנו רווח סמך לאחוז התמיכה בממשלה ברמת סמך של 95%.
  - ג. על סמך סעיף ב'. האם תקבל את הטענה שמיעוט האוכלוסייה תומך הממשלה?
5. משרד הבריאות מתכנן לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחלות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
  - א. כמה מחוסנים יש לדגום ?
  - ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאת גודלו חישובת בסעיף הקודם וקיבל ש 15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשך החורף בשפעת. בנו ברמת סמך של 98% את הסיכוי לחלות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
  - ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98% ? מדוע הוא קטן מ-3% ?

פתרונות:

שאלה 1

1068

שאלה 3

א. 601

ב. 108000 ₪.

## פרק 4 - רווח סמך להפרש פרופורציות

### רקע:

המטרה: לאמוד את  $p_1 - p_2$ : הפרש פרופורציות בין שתי אוכלוסיות שונות.

האומד הנקודתי:  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

התנאי לבניית רווח הסמך: כל מדגם מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכישלונות בכל מדגם לפחות 5 בכל מדגם (יש כאלה שבודקים לפחות 10).

### רווח סמך:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

רק שאפס נופל בתחומי רווח הסמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה x. מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה y. מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?

### פתרון:

(47%, 33%)

**תרגילים:**

1. מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת. מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.  
א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.  
ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק.
2. במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן.  
קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B.  
בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצבם השתפר. בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצבם השתפר.  
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.  
ב. האם על סמך סעיף א ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינת שיעורי ההצלחה?
3. נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית.  
נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.  
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.  
ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

**פתרונות:****שאלה 2**

$$0.093 < P_A - P_B < 0.307 \quad .\alpha$$

**שאלה 3**

$$0.625 < p < 0.7754 \quad .\alpha$$

## פרק 5 - רווח סמך להפרש תוחלות ממדגמים בלתי תלויים

### כששונויות האוכלוסייה ידועות

#### רקע:

מטרה: לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

התנאים לבניית רווח הסמך:

1.  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  ידועות.

2.  $X_1, X_2 \sim N$  או  $n_1, n_2 > 30$

3. שני מדגמים בלתי תלויים.

#### רווח סמך:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$  לא קיים הבדל בין התוחלות.

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נדגמו 100 תושבים מאזור a והמשכורת הממוצעת הייתה שם 9200 ₪.

כמו כן נדגמו 120 תושבים מאזור b וממוצע המשכורות שהתקבל שם 8700 ₪.

לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורות באוכלוסיית שני האזורים היא 1800 ₪.

אמדו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור a לאזור b.

## תרגילים:

1. מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
  
2. ציוני I.Q. מתוכננים כך שיתפלגו נורמאלית עם סטיית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע ציונים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאיים התקבל ממוצע ציונים 99.
  - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הציונים במבחן ה-IQ.
  - ב. האם קיים הבדל בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים?
  
3. חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עבור אילו רמות בטחון יקבע שאין הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

פתרונות :

שאלה 1

(-20,90)

שאלה 3:

רמות בטחון הגבוהות מ : 0.9476



## כששונויות האוכלוסייה אינן ידועות אך שוות והמדגמים בלתי תלויים

### רקע:

מטרה: לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

התנאים לבניית רווח הסמך:

$$1. \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$2. X_1, X_2 \sim N$$

3. מדגמים בלתי תלויים.

השוונת המשוקללת: כיוון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונויות שוות אנו אומדים את השוונת הזו על ידי שקלול שתי השונויות של שני המדגמים על ידי הנוסחה הבאה:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

דרגות החופש:  $d.f = n_1 + n_2 - 2$

רווח סמך:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$  לא קיים הבדל בין התוחלות.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לבאר שבע מבחינת ההכנסה הממוצעת של אקדמאים. להלן תוצאות המדגם שנעשה:

באר שבע	תל אביב	
10	20	מספר האקדמאים
9500	11,000	ממוצע הכנסות של אקדמאים
250	200	סטיית התקן של הכנסות אקדמאים

בנו רווח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחלות ההכנסה בשני האזורים.  
 הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שונות בכל אחד מהאזורים.  
 פתרון : (1357,1643)

**תרגילים:**

1. נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים.

כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

מצאו רווח סמך ברמת סמך של 95% לסטייה בין ממוצע הציונים בישראל לממוצע הציונים בארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

2. להלן 4 תצפיות על משתנה  $X$  שמתפלג  $N(\mu_x, \sigma^2)$  ומשתנה  $Y$  שמתפלג  $N(\mu_y, \sigma^2)$ .

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רווח סמך ל-  $\mu_y - \mu_x$  ברמת הסמך 90%, בהנחה ששני המדגמים בלתי תלויים.

## כששונויות האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים

### רקע:

מטרה: לאמוד את פער התוחלות:  $\mu_1 - \mu_2$ , כלומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי:  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

התנאים לבניית רווח הסמך:

1. מדגמים גדולים.

2. מדגמים בלתי תלויים.

רווח סמך:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רווח הסמך נגיד שבביטחון של  $1 - \alpha$  לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

יבואן רכב מעוניין להשוות בין רכבים יפנים לעומת רכבים אמריקאים מבחינת תצרוכת הדלק שלהם. נדגמו 40 רכבים מכל סוג. לכל רכב נבדק כמות הק"מ שהמכונית נסעה עבור 1 ליטר דלק במהירות של 100 קמ"ש. התוצאות שהתקבלו במדגם הם: ברכבים היפנים ממוצע 12.5 עם סטיית תקן 1.5 וברכבים האמריקאים הממוצע 11.3 עם סטיית תקן של 1.4.

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לפער הממוצעים של צריכת הדלק של מכוניות יפניות לעומת אמריקאיות.

ב. האם על סמך רווח הסמך ניתן לקבוע שקיים הבדל בין שני סוגי הרכבים מבחינת צריכת הדלק?

### תרגילים:

1. במדגם של 45 תלמידים הלומדים משפטים התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 4 שעות עם סטיית תקן 2 שעות מעבר לשעות הלימוד בכיתה. במדגם של 55 תלמידים הלומדים הנדסה התקבל שבשבוע הם לומדים בממוצע 10 שעות עם סטיית תקן של 3 שעות.
  - א. אמדו את הפרש ממוצעי שעות הלמידה של סטודנטים למשפטים לעומת סטודנטים להנדסה ברמת בטחון של 90%.
  - ב. האם קיים הבדל בין סטודנטים למשפטים ולסטודנטים להנדסה מבחינת ההשקעה שלהם מעבר לשעות הלימוד בכיתה?
  
2. מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות וסטיית תקן של 0.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות וסטיית תקן של 1.1 שעות.
 

מצאו רווח סמך לפער בין ממוצע שעות הצפייה בטלוויזיה בין שני האזורים בביטחון של 95%.

## פרק 6 - רווח סמך לתוחלת ההפרש במדגם מזווג

### רקע:

מדגם מזווג: מדגם אחד שבו יש  $n$  צמדדים.

כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים:  $X$  ו- $Y$ .

ניצור משתנה חדש:

$$D = x - y$$

הפרמטר שנרצה לאמוד:  $\mu_D$

התנאים לבניית רווח הסמך:

•  $x, y \sim N$

• המדגם מזווג

נוסחת רווח הסמך:

$$\bar{D} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

כאשר דרגות החופש:  $d.f = n - 1$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב.  
לקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

5	4	3	2	1	הקובץ
38	46	49	48	25	הזמן בתוכנה הראשונה
48	40	42	46	27	הזמן בתוכנה השנייה

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.  
מצאו רווח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

**תרגילים:**

1. נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים בסמסטר א' ו- ב' :

סמסטר א	סמסטר ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

נניח שהציונים מתפלגים נורמאלית.

- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א לבין סמסטר ב.  
 ב. האם על סמך רווח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?  
 ג. מה צריך לשנות בנתונים כדי שהמדגמים יהיו בלתי תלויים?

2. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות :

קווי זהב-Y	בזק-X	המדינה
1.4	1.5	ארה"ב
2	2.1	קנדה
1.9	2.2	הולנד
3.1	3	פולין
3.3	3.5	מצרים
3.2	3.2	סין
4.2	4.2	יפן

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחירים של שתי החברות.



## פרק 7 - רווח סמך לשונות וסטיית תקן

### רקע:

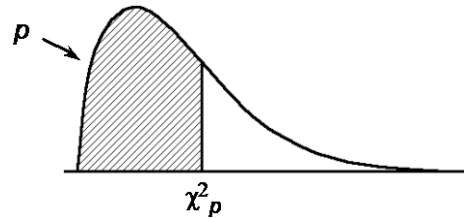
בפרק זה נדון על בניית רווח סמך לשונות האוכלוסייה.

התנאי לבניית רווח הסמך: המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית, למרות שנהוג לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול.

רווח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת חי בריבוע.

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש.

דרגות החופש במקרה זה יהיו:  $n-1$



$$\text{רווח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}$$

$$\text{כאשר } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} \text{ אומד לשונות הלא-ידועה.}$$

אם נרצה לבנות רווח סמך לסטיית תקן אז נוציא שורש לרווח סמך לשונות.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה באוכלוסייה.

### פתרון:

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

**תרגילים :**

1. חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדקות: 18,17,21,26,28.  
בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמאלית, בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.
2. נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפי' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפי' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפי' מתפלגת נורמאלית:  
א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.  
ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפי' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
3. ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים במבחן ה-IQ. להלן התוצאות שהתקבלו :

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$

- נניח שגם בישראל הציונים מתפלגים נורמאלית.  
א. מצאו אומדנים לממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.  
ב. אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוחלת הציונים של נבחנים בישראל.  
ג. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.  
ד. על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבארה"ב? הסבירו.

4. באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון ש  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

א. בנו רווח סמך ל- $\mu$  ברמת סמך של 95%.

ב. בנו רווח סמך ל- $\sigma^2$  ברמת סמך של 95%.

**פתרונות :****שאלה 2**

א.  $30.285 < \mu < 31.315$

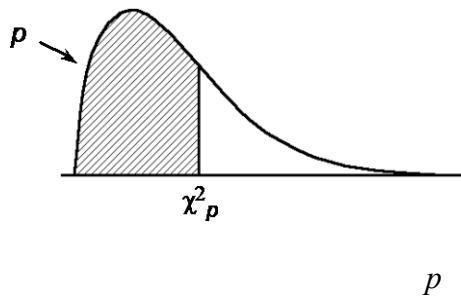
ב.  $0.837 < \sigma < 1.607$

**תשובה 3**

א. לממוצע 104, לשונות 100.

ב.  $99.32 < \mu < 108.68$

ג.  $7.94 < \sigma < 13.7$

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0 <sup>4</sup> 393	0.0 <sup>3</sup> 157	0.0 <sup>3</sup> 982	0.0 <sup>2</sup> 393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

## פרק 8 - רווח סמך ליחס שוניות

### רקע:

נרצה לאמוד את ההבדל בין שתי שוניות משתי אוכלוסיות שונות.

הפרמטר יהיה :  $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$  : כלומר היחס בין השוניות.

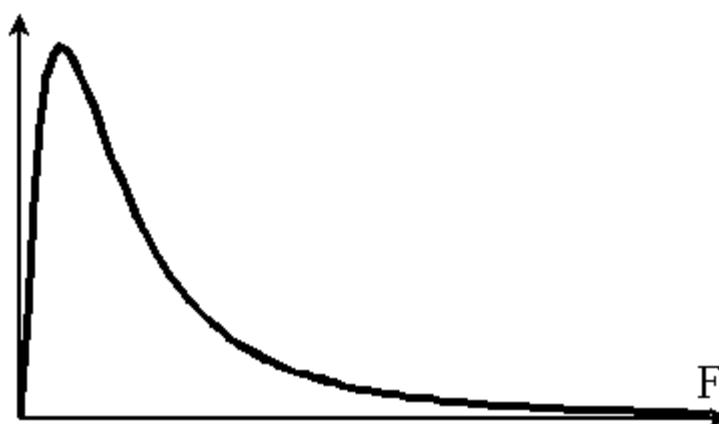
### התנאים:

•  $X_1, X_2 \sim N$  או מדגמים גדולים.

• מדגמים בלתי תלויים.

רווח הסמך יבנה על סמך התפלגות הנקראת התפלגות F. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית

ומושפעת משתי דרגות החופש זו של המונה וזו של המכנה.



$$df_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1$$

רווח הסמך יהיה:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)$$

**דוגמה:** ( פתרון בהקלטה)

מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות :  
במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית  
על בילויים 10,000. כמות הסטודנטים שנדגמו 16.  
במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה  
החודשית על בילויים 490,000.  
נניח שההוצאה החודשית לבילוי בכל קבוצת גיל מתפלג נורמאלית.  
בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% ליחס בין השונות.

**תרגילים:**

1. בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות: מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת שונות החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות. מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות:

סוג המתכת	A	B
N	8	10
$\sum X_i$	16	30
$\sum X_i^2$	60	198

- יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.
- א. בנו רווח סמך ליחס השוניות של רמות החוזק בין שני סוגי המתכות ברמת סמך של 90%.
- ב. בנו רווח סמך ליחס סטיות התקן של רמות החוזק בין שני סוגי המתכות ברמת סמך של 90%.
- ג. האם בבטחון של 90% ניתן לומר שסטיות התקן של שני סוגי המתכות שונות?

2. מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$$

- אמוד ברמת בטחון של 95% פי כמה גדולה השונות של הגברים באוכלוסייה מהשונות של הנשים. מה יש להניח לצורך פתרון?



טבלת התפלגות  $F$ . ערכי החלוקה  $F_p$  של התפלגות  $F(m, n)$   
 $m$  — דרגות חופש המונה;  $n$  — דרגות חופש המכנה

		$m$										
$p$	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
.95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244
.975		648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977
.99		4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106
.995		16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426
.95	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41
.975		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41
.99		98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42
.995		198.50	199.01	199.16	199.24	199.30	199.33	199.36	199.38	199.39	199.39	199.42
.95	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74
.975		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34
.99		34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05
.995		55.55	49.80	47.47	46.20	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.68	43.39
.95	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91
.975		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75
.99		21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37
.995		31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.98	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70
.95	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68
.975		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52
.99		16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89
.995		22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38
.95	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00
.975		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37
.99		13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72
.995		18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03
.95	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57
.975		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67
.99		12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47
.995		16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18
.95	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28
.975		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20
.990		11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67
.995		14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01

		$m$										
$p$	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
.95	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07
.975		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87
.99		10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11
.995		13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23
.95	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91
.975		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62
.99		10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71
.995		12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66
.95	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69
.975		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16
.995		11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91
.95	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48
.975		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67
.995		10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25
.95	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28
.975		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68
.95	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09
.975		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18
.95	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92
.975		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50
.995		8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74
.95	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83
.975		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54
.95	$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75
.975		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36

## פרק 9 - תרגול מסכם ברווחי סמך

1. מהירות הגלישה באינטרנט במקום מסוים מתפלגת נורמאלית . בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps . מהירות מתחת ל- 10 Mbps מוגדרת על ידי החברה כנמוכה.  
 התוצאות שהתקבלו במדגם : ממוצע היה 87 עם סטיית תקן 17 ו-12 פעמים המהירות הייתה נמוכה. בנו רווחי סמך ברמת סמך של 95% לפרמטרים הבאים :  
 א. תוחלת מהירות הגלישה.  
 ב. סטיית תקן של מהירות הגלישה.  
 ג. הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נמוכה.

2. 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה. להלן התפלגות התשובות :

5	4	3	2	1	0	מספר פעמים
10	20	22	28	34	86	מספר אנשים

- א. תנו רווח סמך לממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נוהגים לשתות ביום .  $\alpha = 0.05$   
 ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רווח סמך לאחוז "המכורים לקפה"  $\alpha = 0.1$   
 3. חוקר בנה רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת בשנה. רווח הסמך שהתקבל הוא  $81 < p < 91$  רווח הסמך הני"ל התבסס על מדגם של 500 איש.  
 א. כמה אנשים במדגם טענו שכלל לא התקררו השנה?  
 ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?  
 ג. בנו רווח סמך לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמך של 95% על סמך תוצאות המדגם

4. ציוני IQ בארה"ב מתפלגים נורמאלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו במבחן

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040$$

ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$

א. אמדו ברמת ביטחון של 90% את ממוצע ציוני בחינת ה-IQ בישראל – מהי ההנחה

הדרושה לפתרון?

ב. על סמך רווח הסמך של סעיף א האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה

מארה"ב?

ג. מה היה קורה לרווח הסמך אם הינו מגדילים את רמת הסמך שלו?

5. להלן תוצאות מדגם שבדק עבור כל משפחה האם יש לה בבית מכשיר טאבלט.

אזור מגורים	גוש דן	שאר הארץ
גודל המדגם	200	240
מספר משפחות בעלי טאבלט	160	168

א. בנו רווח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי

טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.

ב. בנו רווח סמך לפרופורצית משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

6. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייסים התקבלו התוצאות

הבאות:

$$\bar{x} = 176.2 \text{ cm}$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832 \text{ cm}^2$$

א. אמדו את הגובה הממוצע של המתגייסים ברמת סמך של 98%.

ב. אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייסים של צה"ל.

7. בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.
- א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?
- ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

8. להלן מדגם של שכר הדירה בשייח של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלי בתל אביב :

שנת 2012	8000	7500	7000	6500	7500
שנת 2013	8000	8200	7800	6800	7700

- בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

**פתרונות:****שאלה 1**

א.  $80.65 \leq \mu \leq 93.35$

ב.  $13.5 \leq \sigma \leq 22.9$

ג.  $0.225 \leq p \leq 0.575$

**שאלה 2**

א.  $1.21 \leq \mu \leq 1.65$

ב.  $10.85\% \leq p \leq 19.15\%$

**שאלה 3**

א. 70

ב. 99.88%

ג.  $83\% \leq p \leq 89\%$

**שאלה 4**

א.  $97.4 \leq \mu \leq 106.6$

ב. לא

ג. יגדל

**שאלה 5**

א.  $0.5\% < p_1 - p_2 < 19.5\%$

ב.  $0.704 \leq p \leq 0.768$

**שאלה 6**

א.  $170.8 \leq \mu \leq 181.6$

ב.  $8.8 \leq \sigma \leq 14.3$

**שאלה 7**

$$\text{א. } -372 \leq \mu_A - \mu_B \leq 772$$

$$\text{ב. } 6467 \leq \mu \leq 7133$$

**שאלה 8**

$$-21 \leq \mu_{2013} - \mu_{2012} \leq 821$$

## פרק 10 - בדיקת השערות כללית

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בתהליך זה ישנן שתי השערות שנבדקות :

השערת האפס המסומנות ב-  $H_0$

והשערה אלטרנטיבית ( השערת המחקר ) המסומנת ב-  $H_1$  .

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשיו , את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה .

למשל ,

ישנה תרופה קיימת למחלה A אשר גורמת ל – 10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי . חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידה , אך מקטינה את הסיכוי לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעל סמך תוצאותיו ננסה להכריע איזה השערה נקבל :

$H_0$  : התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.

$H_1$  : התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה :

הכלל יוצר אזור שניקרא אזור דחייה ( דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה) ואזור קבלה ( קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה). כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .

בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. נשנה את כלל ההכרעה אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת . נבצע מדגם חדש אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו :

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות



הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון- להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני- להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

מה הן הטעויות האפשריות במחקר של התרופות? ( בהקלטה )

נגדיר את ההסתברויות הבאות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 ( רמת מובהקות )

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות} | H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל} | H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון:

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ לקבל} | H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה:

$$\pi = (1-\beta) = P(H_1 \text{ נכונה} | H_0 \text{ לדחות}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

דוגמה: ( פתרון בהקלטה )

בכד יש 10 כדורים. יתכן ש- 5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א- השערת האפס) או ש- 7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב- השערה אלטרנטיבית).

כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל ההחלטה הבא: אם הכדור שהוצא הוא לבן שזהו כד ב' ( $H_1$ ).

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

**תרגילים:**

1. אדם חשוד בביצוע פשע. מהן הטעויות האפשריות בהכרעת הדין?
2. ילד קנה שקית סוכריות אטומה שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון. ישנה שקית אחרת אותה הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון. הוא החליט להוציא באקראי סוכרייה אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טעות בהכרעתו?

3. יהי  $X$  מספר שלם הנבחר באקראי מבין המספרים השלמים. הסיכוי ש- $X$  יקבל ערך

$$p(X = k) = \frac{1}{n} \quad \text{עבור } k = 1, 2, \dots, n$$

נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של  $X$ :

$$H_0 : n = 4$$

$$H_1 : n = 6$$

כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם  $X > 3$ .  
חשבו את הסיכוי לטעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני ואת העוצמה?

4. איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.2	0.2	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

- א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
- ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בינוני" או גרוע מכך נכריע שהמוצר בא ממפעל "שמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטעויות השונים?
- ג. איזה כלל החלטה עדיף? נמק!

5. במטרה לבדוק האם מטבע תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל 7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.
- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה ההסתברות לטעות מסוג ראשון?
- ג. מהי עצמת המבחן אם במציאות אכן המטבע אינו תקין כי הסיכוי לעץ בו הוא 20%.

6. להלן השערות:

$$H_0: X \sim t(5) \quad (\text{התפלגות } t \text{ עם } 5 \text{ דרגות חופש})$$

$$H_1: X \sim Z \quad (\text{התפלגות נורמאלית סטנדרטית})$$

כלל החלטה: נדחה את השערת האפס אם  $X$  גדול מ-2.015.

- א. מהי רמת המובהקות של כלל החלטה?
- ב. מהי העוצמה של כלל החלטה?
7. במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת התראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרעיל לפי תשעת החיישנים עולה על 6600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמאלית.
- א. מה הסיכוי להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?
- ב. מה הסיכוי שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?
- ג. מה ההסתברות שאם המצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?
- ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני?
1. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.
  2. מצב חרום מוגדר כעת בתוחלת של 7500 יחידות.
  3. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החיישנים יהיה מעל 6700.

8. במטרה לבדוק האם במקום עבודה מסוים פרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היותר 2 תתקבל הטענה שפרופורציית הבנים נמוכה מפרופורציית הבנות.
- א. מה רמת המובהקות של כלל ההכרעה הנ"ל?
- ב. מהי העוצמה בהנחה ובחברה 30% בנים?

9. זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמאלית עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות.
- חברת התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שיקבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברת התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיווק "אופטלנוס פורטה".
- א. מהי רמת המובהקות של המבחן המוצע?
- ב. על סמך תוצאות המדגם. מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במציאות התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?
- ד. כיצד תשתנה התשובה לסעיף ג' אם החברה הייתה מחליטה שהיא תמשיך בתהליך שיווק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?
10. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 120. מכון טוען שלימודים אצלו מעלים את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלמידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את טענת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה בלפחות 50 נקודות מאלה שלא היו.
- א. מהי רמת המובהקות של המחקר?
- ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?
- ג. כיצד התשובות לסעיף א ו ב' היו משתנות אם מסתבר שסטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.
11. קו ייצור נחשב תקין אם יש בו לכל היותר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיקו באותו היום את קו הייצור.
- א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. איך קוראים להסתברות זאת?
- ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למרות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. איך קוראים להסתברות זאת?
12. מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת.
- חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

13. מספר המכונניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסונית. בשנה שעברה המכונניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכונניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסת המכונניות לחניון גדל השנה. מנהל החניון החליט לספור את מספר המכונניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכונניות שישפרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.

א. רשום את השערות מנהל החניון ואת כלל ההחלטה שלו. האם כלל ההכרעה הגיוני?  
 ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה?  
 ג. מהי העוצמה של כלל ההחלטה, אם כיום קצב כניסת המכונניות לחניון גדל ל- 4 מכונניות בדקה?

14. עודד עובד במפעל שבו מתחילים לעבוד בשעה 8:00. עודד בדרך כלל מאחר לעבודה והמנהל החליט לרשום את שעת בואו לעבודה. המנהל טוען שמשך האיחור של עודד (דקות),  $X$ , היא משתנה אחיד  $U(0, 60)$ . עודד טוען שהוא לא מגיע באיחור כה גדול, אלא שהתפלגות  $X$  היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת איחור של 20 דקות. לבדיקת טענת המנהל ( $H_0$ ) כנגד טענת עודד ( $H_1$ ), המבוסס על משך האיחור של חגי ביום אחד.

מוצאים שני ככלי הכרעה:

כלל 1: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לפחות 40 דקות.

כלל 2: דחה את השערת האפס אם משך האיחור יהיה לכל היותר 20 דקות.

חשב את הסיכוי לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההכרעה. מי עדיף?

פתרונות:שאלה 2

$$\beta = \frac{2}{5} \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

שאלה 3

$$\beta = 0.5 \quad \alpha = 0.25$$

שאלה 4

$$\beta = 0.8 \quad \alpha = 0.2 \quad \text{א.}$$

$$\beta = 0.3 \quad \alpha = 0.2 \quad \text{ב.}$$

ג. כלל ב'

שאלה 5

ב. 0.00781

ג. 0.1678

שאלה 6

א. 0.05

ב. 0.022

שאלה 7

א. 0.0228

ב. 0.0918

ג. 0.9082

שאלה 8

א. 0.055

ב. 0.383

שאלה 10

א. 0.2981

ב. 0.3974

ג. קטן

שאלה 11

א. 0.0113

ב. 0.0495

**שאלה 12**

חוקר א

**שאלה 13**

ב. 0.1428

ג. 0.566

## פרק 11 - הלמה של ניימן פירסון

### רקע:

שיטה זו עוזרת לנו לבנות מבחנים בעלי עוצמה מקסימאלית עבור  $\alpha$  נתונה. הלמה של ניימן פירסון אומרת שמבחן בעל עוצמה מקסימלית מתקבל כאשר אזור הדחיה שלו כולל את התוצאות שעבורן יחס הנראות הוא הגבוה ביותר. נגדיר את יחס הנראות:

$$x_1, x_2, \dots, x_n - \text{תוצאות הניסוי.}$$

ההשערות:

$$H_0 : x_i \sim p_0$$

$$H_1 : x_i \sim p_1$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p_{H_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{H_0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

המשמעות של יחס הנראות היא פי כמה  $H_1$  יותר סבירה מ  $H_0$ .

### עבור משתנים שמתפלגים בדיד :

#### שלב א :

עבור כל תוצאות המדגם האפשריים מחשבים את הסיכויים בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

#### שלב ב :

מחלקים את הסיכויים באופן הבא :  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p_{H_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p_{H_0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  . ומקבלים את יחס הנראות.

#### שלב ג :

מסדרים את תוצאות הניסוי על פי סדר יורד מהתוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הגבוה ביותר עד התוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הנמוך ביותר.

#### שלב ד :

מכניסים את התוצאה שמניבה את יחס הנראות הגבוה ביותר לאזור הדחיה ובודקים תחת השערת האפס מהי רמת המובהקות המתקבלת . צוברים את התוצאות לפי העיקרון שהוצג עד שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  הרצויה.



**דוגמה:** ( הפתרון בהקלטה)

איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.15	0.25	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית). צור כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 20%.

**עבור משתנים שמתפלגים רציף:****שלב א:**

בונים את פונקציית הצפיפות המשותפת בהנחת השערת האפס ובהנחת השערה האלטרנטיבית.

**שלב ב:**

מחלקים את שלב א באופן הבא:  $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f_{H1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_{H0}(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  . ומקבלים את פונקציית

יחס הנראות.

**שלב ג:**

מזהים את האזור עבורו יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

**שלב ד:**

לפי ההתפלגות של השערת האפס מוצאים את הערכים הקריטיים באזור שנקבע בסעיף הקודם כך שרמת המובהקות תהיה  $\alpha$  שנקבעה מראש.

**דוגמה:** ( פתרון בהקלטה)

נתון ש  $X \sim \exp(\lambda)$

$$H_0 : \lambda = 1$$

$$H_1 : \lambda = 2$$

ההשערות הן :

מצא מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 5% על סמך תצפית בודדת.

### תרגילים:

1. איכות של מוצר מסווגת ל-5 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני, ירוד ופסול. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל	מצוין	טוב	בינוני	ירוד	פסול
"היוצר"	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4	0

בוחרים משלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

- א. חשב את יחס הנראות עבור כל תוצאות המדגם האפשריים.
- ב. צור כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 25%.
- ג. מהי עוצמת המבחן שייצרת בסעיף הקודם.

2. מטילים מטבע 3 פעמים ומתבוננים במספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש. נסמן ב- $p$  את הסיכוי בהטלה בודדת לקבל את התוצאה ראש. ההשערות הן:

$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_1 : p = 0.25$$

מצאו מבחן ברמת מובהקות שלא תעלה על 30% עם עוצמה מקסימלית. מהי העוצמה?

3. בכד א 7 כדורים לבנים ו-8 שחורים. בכד ב 8 כדורים לבנים ו-7 שחורים. אדם בוחר כד וממנו מוציא באקראי 4 כדורים ללא החזרה. הוא מתבונן במספר הכדורים הלבנים שהוצאו ומודיע לך את המספר המתקבל. עליך לבנות כלל הכרעה על סמך המספר המתקבל שיכריע האם מדובר בהוצאה מכד א (השערת האפס) או מכד ב (השערה אלטרנטיבית).

- א. בנה כלל הכרעה בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות שלא תעלה על 10%.
- ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה שבנית בסעיף הקודם?
- ג. מה הסיכוי לטעות מסוג שני של כלל ההכרעה שבנית?

4. בצרור מפתחות 5 מפתחות שרק אחד פותח את הדלת. על סמך מספר הניסיונות לפתיחת הדלת יש

להחליט האם הניסיונות נעשו ללא החזרה (השערת האפס) או עם החזרה (השערה אלטרנטיבית)

של המפתחות לצרור. מצאו מבחן לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא עולה על 0.25.

5. מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה ביממה . לאחרונה התעורר החשד שתוחלת מספר התאונות בכביש עלתה לקצב של שתי תאונות ביממה. דגמו 4 ימים אקראיים וקיבלו את מספר התאונות הבאות ליממה : 3,3,0,1

א. נסחו את הבעיה ובנו מבחן MP עם  $\alpha \leq 0.1$ .

ב. מהי מסקנתך ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מה הסיכוי להכריע שכיום קצב תאונות הדרכים בכביש מספר 4 עלה לשתי תאונות ביממה שאכן כך הדבר באמת? פתרו על סמך המבחן של סעיף א.

6. התפלגות זמן ההמתנה לקופה בסופרמרקט מתפלג מעריכית. בעל הסופרמרקט טוען שתוחלת זמן ההמתנה היא 5 דקות אך הלקוחות חושדים שהתוחלת גבוהה יותר ושווה ל-10 דקות. א. רשמו את השערות המחקר וחשבו את פונקציית יחס הנראות על סמך זמן המתנה של לקוח אקראי לקופה.

ב. מה כיוון אזור הדחייה של השערת האפס.

ג. מצאו את אזור הדחייה עבור רמת מובהקות של 5%.

ד. בהמשך לסעיף הקודם, מה הסיכוי להכריע לטובת בעל הסופרמרקט בטעות.

7. יהי  $X$  תצפית בודדת מפונקציית הצפיפות הבאה, כאשר  $\theta$  פרמטר חיובי :

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} 2\theta x + 1 - \theta, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

השערות הן :

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta = 1$$

א. הוכח שמבחן MP (עוצמה מקסימלית) עם רמת מובהקות  $\alpha$  יהיה  $C = \{X > 1 - \alpha\}$ .

ב. הוכח שהעוצמה של המבחן שמצאת הוא :  $2\alpha - \alpha^2$ .

ג. מצא את כלל ההכרעה והעוצמה עבור  $\alpha = 0.05$ .

8. מחשב חניון "אתרים" רושם את זמן כניסת כל מכונית לחניון. ישנו חשד שעקב תקלה המחשב מבצע את הרישום לכל מכונית שניה. נסמן ב-  $X$  את הזמן בדקות בין רישום לרישום.

אם הרישום הוא תקין ההתפלגות היא מעריכית  $f_0(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ .

אם הרישום הוא לפי החשד, פונקציית הצפיפות היא:  $f_1(x) = \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x}$ .  
כאשר מדובר באותו פרמטר  $\lambda$ .

א. רשמו את ההשערות.

ב. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית כדי לבדוק את ההשערות.

ג. פתרו עבור רמת מובהקות של 5% ו-  $\lambda = 1$ .

ד. רשמו את איזו הדחייה עבור שתי תצפיות אקראיות של  $X$ .

9. יהי  $X_1, \dots, X_n$  מדגם מקרי מהתפלגות בעלת פונקציית הצפיפות הבאה, כאשר  $\theta$  פרמטר חיובי:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{1-\theta x}, & x \geq \frac{1}{\theta} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

א. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימאלית לבדיקת ההשערות  $H_0: \theta = 1$  כנגד  $H_1: \theta = 2$  על סמך תצפית בודדת (ברמת מובהקות 5%).

ב. מהי עוצמת המבחן שמצאת?

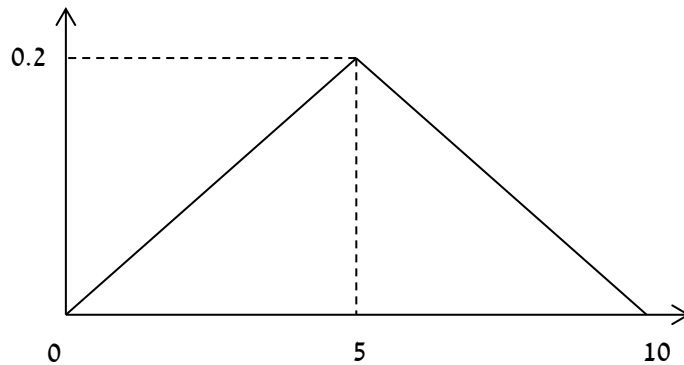
ג. כעת נשנה את הערך תחת האלטרנטיבה ל- 3 במקום 2. בחר בתשובה הנכונה ונמק:

ג.1. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

ג.2. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תקטן.

ג.3. יש לחשב כדי להחליט.

10. נתונה פונקציית הצפיפות הבאה שנשמנה ב-  $f_1(x)$



כמו כן נתון ש :

$$f_0(x) = \begin{cases} 0.1, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. עבור השערות  $H_0 : f = f_0$  כנגד  $H_1 : f = f_1$  מצא את צורת איזור הדחיה של מבחן בעל עוצמה

מקסימלית, על סמך תצפית בודדת.

ב. בהנתן  $\alpha=0.05$ , מצא את כלל הכרעה מתאים בעל עוצמה מקסימלית.

11.  $X$  הנו משתנה רציף המוגדר בין 0 ל-20. להלן השערות מחקר :

$$H_0 : X \sim U(0, 20)$$

$$H_1 : f(X) = \frac{e^{-X/4}}{4(1-e^{-5})}$$

יש לבנות מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 10% על סמך הממוצע 100 תצפיות אקראיות .

**פתרונות :****שאלה 1 :**

ג. 0.7

**שאלה 2 :**

$C = \{X = 0\}$ , עוצמה  $\frac{27}{64}$

**שאלה 3 :**א.  $C = \{X = 4\}$ 

ב. 0.0256

ג. 0.9487

**שאלה 4 :**

$$C = \{X = 1 \text{ or } X \geq 6\}$$
**שאלה 5 :**

א. נדחה את השערת האפס אם מספר התאונות הכולל ב- 4 הימים יהיה לפחות 8 תאונות.

ב. נקבל את השערת האפס (טעות מסוג שני)

ג. 0.5471

**שאלה 8 :**

א. השערת האפס: שומר הלילה רושם כל מבקר אשר ניכנס לבניין.

ההשערה האלטרנטיבית: שומר הלילה מדלג ברישום על מבקר – רושם אחד כן ואחד לא.

ב. אזור הדחייה יהיה היכן שיחס הנראות הינו גבוה לכן הוא יהיה מאינסוף ועד ערך  $K$  מסוים.ג. נדחה את השערת האפס אם  $x > 2.996$ ד.  $x_1 \cdot x_2 > k$ **שאלה 9 :**א. נדחה את  $H_0$  עבור  $1.0513 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

ב. חישוב עוצמת המבחן: 0.668

ג. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל

**שאלה 11 :**כלל ההכרעה הוא נדחה את השערת האפס אם:  $\bar{D} \leq 9.26$

## פרק 12 - בדיקת השערות על פרמטרים

### הקדמה

#### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב-  $H_0$

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה הנורמה.

השערה אלטרנטיבית ( השערת המחקר ) המסומנת ב-  $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כלל ההכרעה.

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה :

הכלל יוצר אזור שניקרא אזור דחייה ( דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה) ואזור קבלה ( קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה). כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.

אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב-  $\alpha$ .

#### שלב ה:

בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

#### שלב ו:

להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{X} = 3120$$

$$S = 280$$

א. מהי אוכלוסיית המחקר?

ב. מה המשתנה הנחקר?

ג. מה הפרמטר הנחקר?

ד. מהן השערות המחקר?

**תרגילים:**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

כתב ופתר - ברק קנדל ©



1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

3. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

4. בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

## טעויות בבדיקת השערות

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה :

הכלל יוצר אזור שניקרא אזור דחייה ( דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה) ואזור קבלה ( קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה). כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי .

בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. נשנה את כלל ההכרעה אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת . נבצע מדגם חדש אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו :

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון- להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני- להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט. אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

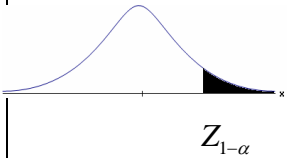
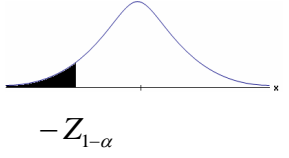
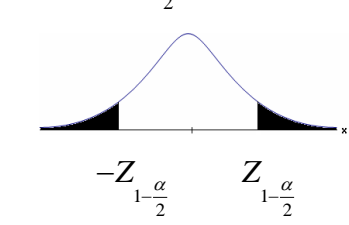
## תרגילים:

1. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
  - א. רשמו את השערות המחקר.
  - ב. מה מסקנת המחקר?
  - ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
  
2. במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
  - א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
  - ב. מה סוג הטעות האפשרית?
  
3. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
  - א. מהי אוכלוסיית המחקר?
  - ב. מה המשתנה הנחקר?
  - ג. מה הפרמטר הנחקר?
  - ד. מה השערות המחקר?
  - ה. מה מסקנת המחקר?
  - ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## פרק 13 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

### כאשר שונות האוכלוסיה ידועה

#### רקע:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבה :</b>
<b>תנאים :</b> 1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ <b>דוחים את <math>H_0</math> -</b>	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ <b>דוחים את <math>H_0</math> -</b>	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ <b>דוחים את <math>H_0</math> -</b>	<b>כלל הכרעה :</b> <b>אזור הדחייה של <math>H_0</math> :</b>

#### **סטטיסטי המבחן :**

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה :

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים :</b>
--	--	--	--

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזובלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדוק את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

### תרגילים:

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהייה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
3. מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
4. המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ושימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
5. לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ.
  - קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.

6. במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחר בתשובה הנכונה.
- הגדלת רמת המובהקות לא תשתנה את מסקנת המחקר.
  - הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
7. חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.
- אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח: (בחר בתשובה הנכונה)
- השערת האפס הייתה נדחית.
  - השערת האפס הייתה לא נדחית.
  - לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.
8. שני סטטיסטיקאים בדקו השערות  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$  עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות. שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.
- אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
  - אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

**פתרונות :****שאלה 1:** $H_0$  נקבל**שאלה 2:** $H_0$  נדחה**שאלה 3:** $H_0$  נדחה**שאלה 4:** $H_0$  נדחה**שאלה 5:** $H_0$  נקבל**שאלה 6:**

א

**שאלה 7:**

ג

**שאלה 8:**

א. אותה מסקנה

ב. לא ניתן לדעת.



**סיכוי לטעויות ועוצמה כאשר שונות האוכלוסייה ידועה**

**רקע:**

		הכרעה	
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

נגדיר את ההסתברויות הבאות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות)

$$\alpha = P(H_0 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לקבל})$$

רמת בטחון:

$$(1 - \alpha) = P(H_0 \text{ לקבל את } H_0 \mid H_0 \text{ נכונה}) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

עוצמה:

$$\pi = (1 - \beta) = P(H_1 \text{ לדחות את } H_0 \mid H_1 \text{ נכונה}) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$

התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבה :</b>
3. $\sigma$ ידועה			<b>תנאים :</b>
4. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	<b>כלל ההכרעה :</b> אזור הדחייה של $H_0$ :
$P_{H_1} (\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1} (\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$P_{H_1} (\mu_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	<b>חישוב <math>\beta</math> :</b>

התפלגות ממוצע המדגם :  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} : \text{התקנון}$$

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

בתחילת השנה חשבון הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 ₪ עם סטיית תקן של 80 ₪ לחודש. בעקבות כניסתן של חברות טלפון סלולארית חדשות מעוניינים לבדוק האם כיום ממוצע חשבון הטלפון הסלולארי פחת. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבון הטלפון הסלולארי שלהם היה 150 ₪ בממוצע לחודש.

א. רשמו את השערות המחקר ובנו כלל הכרעה במונחי חשבון ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.

ב. מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?

ג. נניח שבמציאות כיום החשבון הממוצע הוא 160 ₪. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ד. אם נקטין את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

**תרגילים:**

1. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$  להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר  $\mu$  :
- $$H_0 : \mu = 5$$
- $$H_1 : \mu = 7$$
- מעוניינים ליצור כלל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בודדת כך שרמת המובהקות תהיה 5%.
- א. עבור אילו ערכים של  $X$  שידגם נדחית השערת  $H_0$  ?
- ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- ג. אם במדגם התקבל ש  $X = 6.9$  מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?
2. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחות לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א?
3. להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת :
- $$H_0 : \mu = 200$$
- $$H_1 : \mu \neq 200$$
- $$\sigma = 30$$
- $$n = 225$$
- א. רשום כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבר ללא חישוב איך העצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהייה 5%?

4. מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
- א. רשום את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 5%.
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

5. להלן השערות של מחקר

$$H_0 : \mu = 50$$

$$H_1 : \mu = 58$$

- מעוניינים לדגום 100 תצפיות. ידוע שסטית התקן של ההתפלגות הינה 20.
- א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%. מהי רמת המובהקות?
- ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
1. סטיית התקן הייתה יותר גדולה.
2. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלהלן הן שאלות רב בררתיות. בחר בכל שאלה את התשובה הנכונה ביותר:

6. אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אזי:
- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדל.
- ב. העוצמה של המבחן גדלה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדל.
- ד. תשובות א ו-ב נכונות.
7. חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן:
- א. השערת האפס נכונה.
- ב. השערת האפס נדחתה.
- ג. השערת האפס לא נדחתה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

8. מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בדיקת השערה :

$1 - \beta$	$\alpha$
גדולה	א. גדולה
קטנה	ב. גדולה
גדולה	ג. קטנה
קטנה	ד. קטנה

9. נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו אזור דחיית

$H_0$  קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

א. הן  $\alpha$ , והן  $(1 - \beta)$ , יקטנו.

ב.  $\alpha$  יישאר ללא שינוי ואילו  $(1 - \beta)$  יגדל.

ג.  $\alpha$  יגדל ואילו  $(1 - \beta)$  יקטן.

ד. הן  $\alpha$  והן  $(1 - \beta)$  יגדלו.

10. ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח שלחץ הדם בקרב

עיתונאים גבוה יותר מהממוצע באוכלוסייה. הוא לקח מדגם של 60 עיתונאים

וקיבל ממוצע 137.

על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרב

העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה ?

א. טעות מסוג ראשון.

ב. טעות מסוג שני.

ג. טעות מסוג שלישי.

ד. אין טעות במסקנתו.

**פתרונות :****שאלה 1:**

א. מעל 6.645

ב. 0.3632

**שאלה 2:**א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 2.24$ ב. נדחה  $H_0$ 

ג. 1

**שאלה 3:**א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} > 203.29$  או  $\bar{X} < 196.71$ 

ב. 0.8051

ג. תקטן.

**שאלה 4:**א. נדחה  $H_0$  אם  $\bar{X} < 48.9$ 

ב. 0.0885

ג. תקטן.

ד. תקטן.

**שאלה 6:**

ד

**שאלה 7:**

ג

**שאלה 8:**

ג

**שאלה 9:**

א

**שאלה 10:**

ב

### קביעת גודל מדגם כששונות האוכלוסייה ידועה

#### רקע:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu = \mu_1$$

השערות המחקר הן :

סטיית התקן של האוכלוסייה ידועה  $\sigma$  ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי :

$$n \geq \left( \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

#### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

משרד החינוך מפעיל בגן חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו תוחלת הציון במבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנותנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.

נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 17$ .

כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצים לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאם בהפעלת השיטה ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%. כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?



### תרגילים:

1. במבחן אינטליגנציה הציונים מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיכולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכלוסיות במצב סוציו אקונומי נמוך תוחלת הציונים היא 95. אם מעוניינים לגלות את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כשרמת המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?

2. משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות: כ-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החודשי ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה נדחה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?)

$$3. \begin{aligned} H_0 : \mu = \mu_0 & : \text{השערות המחקר הן} \\ H_1 : \mu = \mu_1 & \end{aligned}$$

כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה  $\sigma$  מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הוכח שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה :

$$n \geq \left( \frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

**פתרונות :**

**שאלה 1:**

41

**שאלה 2 :**

78

**שאלה 3:**

הוכחה

## מובהקות התוצאה ( p-value ) בבדיקת השערות על תוחלת עם שונות ידועה

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:  
 באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמשומן ב-  $p_v$ .  
 את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יכול לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.  
 המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

$$\text{אם } p_v \leq \alpha \text{ דוחים את } H_0$$

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבה :
.5 $\sigma$ ידועה			תנאים :
.6 $X \square N$ או מדגם מספיק גדול			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	p-value

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ כאשר בהנחת השערת האפס :}$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלית עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**תרגילים:**

1. לפניך השערות של מחקר :

$$H_0 : \mu = 70$$

$$H_1 : \mu > 70$$

המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות :

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 74$$

מהי מובהקות התוצאה?

2. השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?

3. אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ – 100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?

ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?

ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

4. מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?

ב. אם נוסף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?

ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.

5. אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאוד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון? לא נכון? נמק.
6. בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value}=0.02$ .  
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה.  
 א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.  
 ב. ידחה את השערת האפס מקרה.  
 ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.  
 ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
7. מובהקות התוצאה (PV) היא גם : ( בחר בתשובה הנכונה )  
 א. רמת המובהקות המינימלית לדחות השערת האפס.  
 ב. רמת המובהקות המקסימלית לדחיית השערת האפס.  
 ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.  
 ד. רמת המובהקות המינימלית לאי דחיית השערת האפס.
8. בבדיקת השערות מסוימת התקבל  $p\text{ value}=0.0254$  לכן (בחר בתשובה הנכונה):  
 א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .  
 ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .  
 ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .  
 ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

**פתרונות :****שאלה 1:**

0.0228

**שאלה 2:**

עבור כל רמת מובהקות סבירה.

**שאלה 3:**

ב. 0.1056

ג. 0.1056

ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.

**שאלה 4:**

א. 0.0006

ב. יקטן.

ג. נכריע שאין כיוול.

**שאלה 5:**

נכון

**שאלה 6:**

תשובה א:

**שאלה 7:**

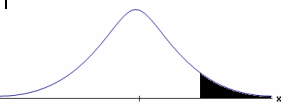
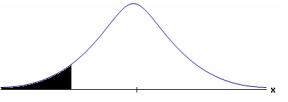
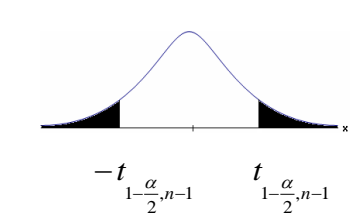
תשובה א :

**שאלה 8:**

תשובה ג :

בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כאשר שונות האוכלוסייה אינה ידועה

רקע:

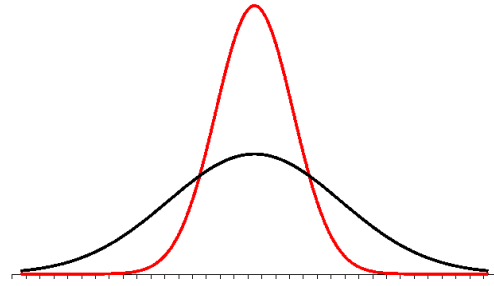
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבה :
7. $\sigma$ אינה ידועה			תנאים :
8. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה : אזור הדחייה של $H_0$ :
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה : נדחה $H_0$ אם מתקיים :

סטטיסטי המבחן :

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש. דרגות החופש הן  $df=n-1$ . ככל שדרגות החופש עלות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ.  
 כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.  
 א. מהן השערות המחקר?  
 ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?  
 ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

תרגילים:

1. משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

2. משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מבארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

4. באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

5. ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם.

ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ .

רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ .

מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.

א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.

ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.

ג. שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.

ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

6. נתון ש  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר.

החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את

קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15

תצפיות.

בחר בתשובה הנכונה :

א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.

ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.

ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

**פתרונות:****שאלה 1:** $H_0$  נדחה**שאלה 2:** $H_0$  נדחה**שאלה 3:** $H_0$  נקבל**שאלה 4:** $H_0$  נקבל**שאלה 5:**

התשובה היא : ב

**שאלה 6:**

התשובה היא : ג

## מובהקות התוצאה ( p-value ) כאשר שונות האוכלוסייה לא ידועה

### רקע:

נזכיר שהמסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא :

$$\text{אם } p_v \leq \alpha \text{ דוחים את } H_0$$

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבה :</b>
9. $\sigma$ אינה ידועה 10. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול			<b>תנאים :</b>
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$	<b>p-value</b>

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n - 1$$

**דוגמה** : (פתרון בהקלטה)

- ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעבודה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדקות הם : 27, 34, 32, 40, 30 . הנח שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.
- א. רשום את השערות המחקר.
  - ב. מצא חסמים למובהקות התוצאה.
  - ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% ?

### תרגילים :

1. קו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים :
- $$1008, 1024, 996, 1005, 997$$
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה? הצג חסמים.  
 ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
2. חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרת לילה איטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. במדגם מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרת לילה נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטית תקן של 3 שעות.  
 מהי ה- $\alpha$  המינימלית שלפיה ניתן להחליט שאכן העובדים במשמרת לילה איטיים יותר ?
3. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית . במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות :
- $$\bar{x} = 176.2$$
- $$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$
- מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6% ?

**פתרונות :**

**שאלה 3:**

נקבל  $H_0$



## הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על תוחלת

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu$ :

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל  $\mu$ :

אם  $\mu_0$  נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$

אם  $\mu_0$  לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו:

$$H_0 : \mu = 80$$

$$H_1 : \mu \neq 80$$

$$\alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90% וקיבל:  $79 < \mu < 84$ .

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

**תרגילים :**

1. חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = 90$$

$$H_1 : \mu \neq 90$$

החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא : (87,97).  
אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

2. חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.  
ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבר.

3. יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצלין היא 200 מ"ג לקפסולה.  
משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצילין לקפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצלין בקפסולה מתפלגת נורמלית.  
א. בנה רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע כמות הפנצלין לקפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.  
ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המסופקת על ידי היצרן.

**פתרונות :****שאלה 1:**

1. נקבל השערת  $H_0$

**שאלה 2:**

א.  $112.87 \leq \mu \leq 118.13$

ב. נכריע שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.

**שאלה 3:**

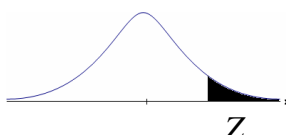
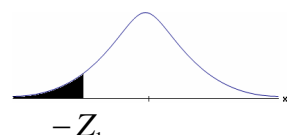
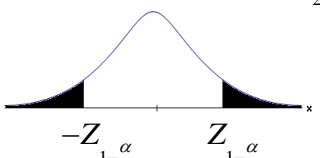
א.  $191.8 \leq \mu \leq 200.2$

ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

## פרק 14 - בדיקת השערות על פרופורציה

### התהליך

**רקע:**

$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	<b>השערת האפס:</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
$np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$			<b>תנאים:</b>
$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ <b>- דוחים את <math>H_0</math></b>	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ <b>- דוחים את <math>H_0</math></b>	או $Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ <b>- דוחים את <math>H_0</math></b>	<b>כלל ההכרעה:</b> <b>אזור הדחייה של:</b>

**סטטיסטי המבחן:**

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	<b>כלל</b> <b>ההכרעה:</b> <b>אזור הדחייה של <math>H_0</math></b>
--	--	--	--

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

**תרגילים:**

1. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
2. במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
3. הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?
4. קפיטריה במכללה מסוימת מעריכה כי אחוז הסטודנטים שקונים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמיתות הערכה של הקפיטריה.
  - א. רשמו את ההשערות.
  - ב. בדוק את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
  - ג. מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
5. חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
6. שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות:

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

חוקר א השתמש ברמת מובהקות  $\alpha_1$  וחוקר ב ברמת מובהקות  $\alpha_2$  החוקר הראשון דחה את  $H_0$  ואילו החוקר השני קיבל את  $H_0$ . שניהם התבססו על אותם תוצאות של מדגם.

בחר בתשובה הנכונה:

א.  $\alpha_1 = \alpha_2$

ב.  $\alpha_1 > \alpha_2$

ג.  $\alpha_1 < \alpha_2$

ד. המצב המתואר לא אפשרי.

**פתרונות :****שאלה 1:** $H_0$  נדחה**שאלה 2:** $H_0$  נדחה**שאלה 3:** $H_0$  נקבל**שאלה 4:**ב. נקבל  $H_0$ 

ג. המסקנה לא תשתנה.

**שאלה 5:**א. נדחה  $H_0$ 

ב. המסקנה לא תשתנה.

**שאלה 6:**

התשובה היא : ג.

**סיכוי לטעויות ועוצמה****רקע:**

	הכרעה		
		H0	H1
מציאות	H0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H1	טעות מסוג 2	אין טעות

**נגדיר את ההסתברויות הבאות:****הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 ( רמת מובהקות ):**

$$\alpha = P(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לדחות})$$

**הסיכוי לבצע טעות מסוג 2:**

$$\beta = P(H_0 \text{ לקבל} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

**רמת בטחון:**

$$(1-\alpha) = P(H_0 \text{ לקבל} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_0}(H_0 \text{ לקבל})$$

**עוצמה:**

$$\pi = (1-\beta) = P(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לדחות את } H_0) = P_{H_1}(H_0 \text{ לדחות})$$



**התהליך לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:**

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה</b> <b>אלטרנטיבית:</b>
$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$			<b>תנאים:</b>
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	<b>כלל ההכרעה:</b> <b>אזור הדחייה של</b> $H_0$
$P_{H_1}(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$	$P_{H_1}(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$	$P_{H_1}(p_0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}})$	<b>חישוב <math>\beta</math> :</b>

כאשר :  $\hat{P} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

והתקנון :  $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

רופאי שיניים טוענים שיותר ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.

ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא שיניים באופן קבוע.

### תרגילים:

1. משרד הבריאות פרסם ש 10% מתושבי המדינה סובלים ממחלת האסטמה. מחקר דורש לבדוק האם בחיפה, בגלל זיהום האוויר, שיעור הסובלים מאסטמה גבוה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
  - א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקתן.
  - ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסטמה?
  - ג. כיצד תשנה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסטמה?
  - ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבהסתברות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסטמה אינה נכונה?
  
2. אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
  - א. ניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10% מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
  
3. בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
  - א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.
  - ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?
  
4. מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקבלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתקבלת.
  - א. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בנים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?
  
5. חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני לכן ( בחר בתשובה הנכונה )
  - א. השערת האפס נכונה.
  - ב. השערת האפס נדחתה.
  - ג. השערת האפס לא נדחתה.
  - ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.
  
6. קבע אם הטענה הבאה נכונה :
 

”בבדיקת השערות לא ניתן לבצע בו זמנית טעות מסוג ראשון וטעות מסוג שני”

**פתרונות:****שאלה 1:**

ב. 0.9015

ג. תגדל

ד. טענה לא נכונה.

**שאלה 2:**

0.4404

**שאלה 3:**

א. 0.1446

ב. תקטן.

**שאלה 4:**

חוקר א.

**שאלה 5:**

התשובה הנכונה היא ג.

**שאלה 6:**

נכונה.

**קביעת גודל מדגם****רקע:**

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p = p_1$$

השערות המחקר הן :

מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על  $\alpha$  והסיכוי לטעות מסוג שני לא יעלה על  $\beta$ .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המדגם הרצוי :

$$n \geq \left( \frac{Z_{1-\alpha} \sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta} \sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השוהים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נוקי השמש. בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתה בשמש ללא הגנה. מה גודל המדגם המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הנ"ל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסיכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסיכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

### תרגילים:

1. משרד התמי"ת פרסם שאחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%. לעומתו, משרד הפנים טוען שחלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%.  
 כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שיענה על שני התנאים הבאים:
  - אם משרד התמי"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.
  - אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.
  
2. מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונת מזל הינו 0.42.  
 אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר. כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם במציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%.

**פתרונות:**

**שאלה 1:**

891

**שאלה 2:**

224

### מובהקות התוצאה

#### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:  
 באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב-  $p_v$ .  
 את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.  
 המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

$$\text{אם } p_v \leq \alpha \text{ דוחים את } H_0$$

מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

$$p_v = P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

אם ההשערה היא דו צדדית :

$$p_v = 2 P_{H_0} \text{ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)}$$

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \ \& \ n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p})$	$2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p}) \leftarrow \hat{p} > p_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p}) \leftarrow \hat{p} < p_0$ אם	p-value

$$\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right) \text{ כאשר בהנחת השערת האפס :}$$

והתקנון :

$$Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$



**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונים ללמוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מדגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בנים.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

### תרגילים:

1. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.
  - א. מהי מובהקות התוצאה?
  - ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
  
2. נהוג לחשוב ש 60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהמיטה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שללא שנת צהריים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגמו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהריים מתוכם התקבל ש 41 קמו במהלך הלילה.
  - א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה תתקבל הטענה במחקר?
  - ב. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
  - ג. עבור אילו רמות מובהקות נקבל את טענת המחקר?
  - ד. מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
  
3. במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש 60 מההטלות הראו עץ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
  
4. בבדיקת השערות על פרופורציה התקבל שה-  $p\text{-value}=0.02$ .
  - א. יקבל את השערת האפס
  - ב. ידחה את השערת האפס.
  - ג. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
  
5. קבע אם הטענה הבאה נכונה:
 

"במבחן לבדיקת השערות חד-צדדי התקבל ערך  $p\text{-value}$  של 3% לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנתונים ללא שינוי) היינו מקבלים ערך  $p\text{-value}$  של 6%"
  
6. במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתכנית יעילה?

**פתרונות :****שאלה 1 :**

א. 0.0455

**שאלה 2 :**

א. 0.0548

ב. 0.0548

ג. מעל 0.0548

ד. נכריע לטובת טענת המחקר.

**שאלה 3 :**

$$p_v = 0$$

**שאלה 4 :**

התשובה הנכונה : ב

**שאלה 5 :**

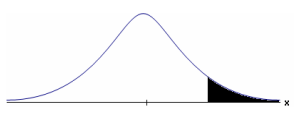


הטענה נכונה

**שאלה 6 :**

0.7486

**פרק 15 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות**

**רקע:**

$H_0 : p_1 - p_2 = 0$ $H_1 : p_1 - p_2 > 0$	$H_0 : p_1 - p_2 = 0$ $H_1 : p_1 - p_2 < 0$	$H_0 : p_1 - p_2 = 0$ $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבית:
2. מדגמים גדולים		1. מדגמים בלתי תלויים	תנאים:
$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	או $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של:

**סטטיסטי המבחן:**

$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$  כאשר הפרופורציה המשוקללת:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2, H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ או $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$
---	---	--	---

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}\right)$$

התפלגות של  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ :

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2, H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבחינה. נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבחינה. האם שיעור העוברים את הבחינה בסטטיסטיקה גבוה מאשר מהבחינה במיקרו כלכלה? בדקו ברמת מבוהקות של 10%.

**תרגילים:**

1. במדגם של 200 גברים. 8% מהם היו מובטלים. המדגם של 180 נשים 10% מהן היו מובטלות. האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות. בדוק ברמת מובהקות של 5%.
2. אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה. במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.
  - א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?
  - ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?
3. נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוך הגברים ל-48% תעודת בגרות. מתוך הנשים ל-58% תעודת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאיות לבגרות גבוה משיעור הזכאים.
  - א. מהי מובהקות התוצאה?
  - ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
4. במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדרום הארץ התקבל כי 20 פרות נושאות וירוס מסוים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נושאות וירוס גם כן.
  - א. בנו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הווירוס תקף את פרות הדרום באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ.
  - ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
  - ג. מהי עוצמת המבחן אם שיעור הפרות בדרום עם הווירוס גבוה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הווירוס?
  - ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

**פתרונות:**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

**שאלה 1:**

לא נדחה את  $H_0$

**שאלה 2:**

א. נדחה  $H_0$

ב. נדחה  $H_0$

**שאלה 3:**

א. 0.0139

ב. נדחה  $H_0$

**שאלה 4:**

ב. נדחה  $H_0$

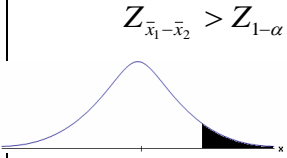
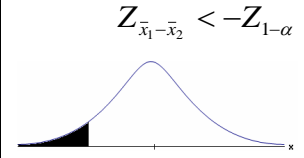
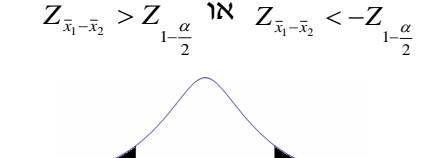
ג. 0.8238

ד. תגדל

## פרק 16 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

### כשהשונויות של האוכלוסייה ידועות

#### רקע:

$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$	<b>השערת האפס:</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
<b>תנאים:</b> 1. מדגמים בלתי תלויים 2. $\sigma_1, \sigma_2$ ידועות 3. $X_1, X_2 \sim N$ או מדגמים מספיק גדולים			
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ - דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ - דוחים את $H_0$	<b>כלל ההכרעה:</b> אזור הדחייה של $H_0$

#### סטטיסטי המבחן:

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

#### חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים:</b>
---	---	--	---

#### התפלגות הפרש הממוצעים:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

#### התקנון:

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$



**דוגמה : (פתרון בהקלטה)**

בשנת 2004 הפער בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000 ₪ לטובת הגברים.  
מעוניינים לבדוק האם כיום הצטמצם הפער בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע.  
נדגמו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגמו 80 עובדות, שכרן הממוצע היה  
7809 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ושוות ל-2000 ₪ באוכלוסיית הנשים  
ו-3000 ₪ באוכלוסיית הגברים. מה המסקנה ברמת מבוהקות של 5%?

### תרגילים :

1. מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאנשים שלא חיים במרכז. נדגמו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלו נשאלו כמה שעות ביום הם נוהגים לצפות בטלוויזיה.  
במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות.  
במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות.  
לצורך פתרון הניחו שבכל אזור, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
2. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.
3. במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.  
א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית.  
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
4. במחקר מקיף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ בממוצע.  
מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגמו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושוות ל-6 ס"מ אצל הנשים. ו-12 ס"מ אצל הגברים.  
א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?  
ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות הזאת?

**פתרונות:****שאלה 1:**נדחה  $H_0$ **שאלה 2:**לא נדחה את  $H_0$ **שאלה 3:**


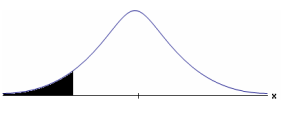
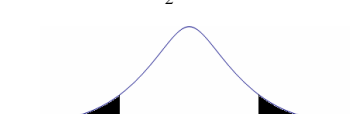
א. 0

ב. נדחה  $H_0$ **שאלה 4:**א. נדחה  $H_0$  אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביותר מ-10.72 ס"מ.

ב. 0.6331

**כשהשונות של האוכלוסייה לא ידועות והמדגמים גדולים**

**רקע:**

$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
<p align="center">4. מדגמים בלתי תלויים 5. <math>\sigma_1, \sigma_2</math> לא ידועות 6. מדגמים מספיק גדולים</p>			<b>תנאים:</b>
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ <b>דוחים את <math>H_0</math> -</b>	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ <b>דוחים את <math>H_0</math> -</b>	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ <b>דוחים את <math>H_0</math> -</b>	<b>כלל הכרעה:</b> אזור הדחייה של $H_0$ :

**סטטיסטי המבחן :**

$$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$ <b>או</b> $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים:</b>
---	---	---	---

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. במדגם של 46 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543 וסטיית תקן 123. במדגם של 50 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508 וסטיית תקן 178. מה המסקנה ברמת מובהקות 5%?

**תרגילים:**

4. חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. במדגם של 35 ברגים מסוג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות וסטיית תקן 4 ובמדגם של 45 ברגים מסוג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25 וסטיית תקן 6. האם על סמך תוצאות המדגם יש הבדל בין סוגי הברגים מבחינת רמת הקשיות שלהם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

5. כדי לבדוק האם נהגים השותים תחת השפעת אלכוהול נוהגים מהר יותר מאלו שאינם שותים בוצע מדגם שבו בדקו את המהירות המקסימאלית של כל נהג בקמ"ש. להלן התוצאות:

S	$\bar{X}$	גדול מדגם	
20	80	70	נהגים השותים אלכוהול
15	60	100	נהגים שאינם שותים אלכוהול

- א. מהי מובהקות התוצאה?  
 ב. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

**פתרונות:****שאלה 1:**

1. נדחה  $H_0$


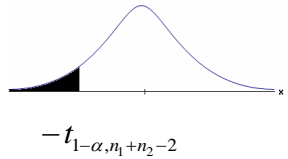
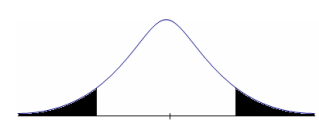
**שאלה 2:**

א. 0

ב. נדחה  $H_0$

**בששונות האוכלוסיה לא ידועות ומניחים שהן שוות**

**רקע:**

$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_0 \mu_1 - \mu_2 = c$ $H_1 \mu_1 - \mu_2 \neq c$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
7. מדגמים בלתי תלויים 8. $\sigma_1, \sigma_2$ לא ידועות אך שוות 9. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית			<b>תנאים:</b>
$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\alpha, n_1+n_2-2}$ - דוחים את $H_0$	או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2}$ - דוחים את $H_0$	<b>אזור הדחייה של <math>H_0</math> :</b>

**סטטיסטי המבחן :**

$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$  : השונות המשוקללת

$$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

**חלופה אחרת לכלל הכרעה:**

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	<b>נדחה <math>H_0</math> אם מתקיים:</b>
---	---	--	---

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתכה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתכה של הסגסוגת לבנייה שמשמשים בה כיום לבניית בניינים.

לצורך בדיקת טענת המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכות מהסוג הישן ו-12 יחידות של מתכות מהסוג החדש.

**להלן תוצאות המדגם:**

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת הישנה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות

$$. S^2 = 200$$

טמפרטורת ההתכה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות

$$. S^2 = 260$$

נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתכה מתפלגת נורמאלית עם אותה שונות במתכות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

**תרגילים:**

1. להלן נתונים של שטחי דירות מתוך דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (מטרים רבועים):

120	94	90	130	95	112	120	<b>2012</b>
	69	74	105	91	82	100	<b>2013</b>

בדקו שבשנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012 עבור רמת מובהקות של 5%. הניחו ששטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שונות.

2. נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו למבחן IQ. להלן תוצאות המדגם:

המדינה	ישראל	ארה"ב
גודל המדגם	15	15
סכום הציונים	1560	1470
סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים במבחן ה-IQ לטובת ישראל. רשמו את כל ההנחות הדרושות לצורך פתרון התרגיל.

3. להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

1-100W	2-60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{x}$
72	80	S
15	13	n

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות במוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפתרון.

ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנוורות מסוג W60 דולקות במוצע יותר מאשר נורות מסוג W100?

ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות יותר מ-1000 שעות. רשמו את כל ההנחות הדרושות.

**פתרונות:**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



**שאלה 1:**

לא נדחה  $H_0$

**שאלה 2:****שאלה 3:**

א. נדחה  $H_0$



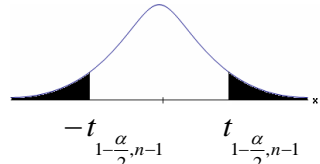
ב. רמות מובהקות של לפחות 5%

ג. לא נדחה  $H_0$

**פרק 17 - בדיקת השערות על תוחלת הפרשים במדגמים מזווגים  
(תלויים)**

**בדיקת השערות למדגמים מזווגים**

**רקע:**

$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D > C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D < C$	$H_0: \mu_D = C$ $H_1: \mu_D \neq C$	השערת האפס : השערה אלטרנטיבית:
10. $\sigma_D$ אינה ידועה 11. $D \square N$ או מדגם מספיק גדול			תנאים:
$t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{D}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{D}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$	כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה : נדחה $H_0$ אם מתקיים:

סטטיסטי המבחן :

$$t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D / \sqrt{n}}$$

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}$$

**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשת השיווק "מגה בעיר" הטוענת שמחיריה נמוכים מהמחירים מרשת השיווק "שופרסל".

לצורך בדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המחירים נבדקו בשתי הרשתות. להלן המחירים :

המוצר	מגה בעיר	שופרסל
שמפו	17	18
גיל כביסה	48	57
עוגת גבינה	35	35
לחם	12	10
קפה נמס	49	47
בקבוק יין	113	142
גבינה בולגרית	20	26

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמאלית בדקו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשת "מגה בעיר".

**תרגילים:**

1. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

המדינה	X	Y
ארה"ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.2
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

- בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים במוצעי?

2. מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	590	500	390	670	640	420	470	506
אחרי	580	520	510	680	610	430	540	570

- מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלג נורמלית.

3. נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א	סטטיסטיקה ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

- פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים במוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הנח שהציונים מתפלגים נורמלית.
- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?
- ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?
- ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10% ?

4. לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמאלית ללא ידיעת השונות האמתית.
- המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזווגים.

5. בתחנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג):

משקל במכשיר 1	5.4	6.9	7.0	5.2
משקל במכשיר 2	5.3	6.9	7.1	5.0

- נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.  
 המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.
6. כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.  
 המבחן שיש לבצע כאן הוא:
- מבחן Z למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגם יחיד.
  - מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
  - מבחן T למדגמים מזווגים.

**פתרונות:****שאלה 1:**

לא נדחה  $H_0$

**שאלה 2:**

לא נדחה  $H_0$

**שאלה 3:**

א.  $0.25 \leq p \leq 0.5$

ב. 0.5

ג. לא נדחה  $H_0$

**שאלה 4:**

התשובה היא ד.

**שאלה 5:**

התשובה היא ד.

**שאלה 6:**

התשובה היא ג.

## פרק 18 - הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות על הפרש תוחלות

### רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדית ברמת מובהקות  $\alpha$  על  $\mu_1 - \mu_2$  :

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = C$$

$$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רווח סמך ברמת סמך של  $1 - \alpha$  ל  $\mu_1 - \mu_2$  :

אם C נופל ברווח  $\leftarrow$  נקבל את  $H_0$

אם C לא נופל ברווח  $\leftarrow$  נדחה את  $H_0$

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגם מזווג. להלן השערותיו:

$$H_0: \mu_D = 80$$

$$H_1: \mu_D \neq 80$$

$$\alpha = 5\%$$

החוקר בנה רווח סמך ברמה של 90%

$$78 < \mu_D < 83$$

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?



**תרגילים:**

1. נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן ציוניהם בסמסטר א' ו- ב' :

סטטיסטיקה א	סטטיסטיקה ב
74	80
68	84
90	87
75	76
82	100

א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר א לבין סמסטר ב.  
 ב. פורסם שתלמידים שמסיימים את סמסטר ב משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סמסטר א' האם יש אמת בפרסום?

2. הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו- 3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים :

68	90	82	מרצה X
64	81	68	מרצה Y

א. חשבו רווח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.  
 ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכריע שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

**שאלות אמריקאיות:**

3. סטטיסטיקאי נתבקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקריים בלתי תלויים.

הוא חישב רווח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיבל את הרווח  $-2 < \mu_1 - \mu_2 < 4.5$ .

אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותם נתונים את ההשערות :

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$  ;  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ , ברמת מובהקות 0.05 מסקנתו תהיה :

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתונות בשאלה סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

4. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו :
- $$-0.0293 < \mu_b < 0.2145$$
- רווח הסמך הוא ברמת סמך של 95%.
- לכן מסקנת המחקר היא :
- א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיוון שלא נאמר מה ההגדרה של D.

**פתרונות:****שאלה 1:**

א.  $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$

ב. נכריע שיש אמת בפרסום.

**שאלה 2:**

א.  $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$

ב. נכריע שאין הבדל.

**שאלה 3:**

התשובה היא ג.

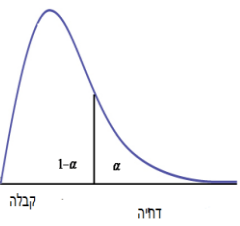
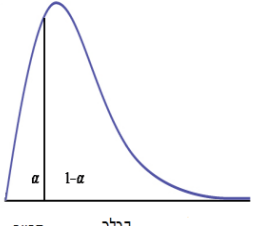
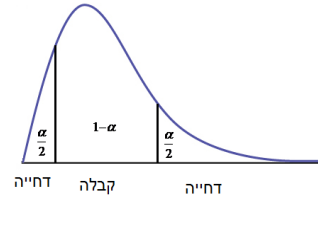
**שאלה 4:**

התשובה היא א.

**פרק 19 - בדיקת השערות על שוניות**

**בדיקת השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה**

**רקע:**

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבית:</b>
$X \sim N$			<b>תנאים :</b>
 <p style="text-align: center;"><math>\chi^2 &gt; \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>\chi^2 &lt; \chi_{\alpha}^{2(n-1)}</math></p>	 <p style="text-align: center;">או <math>\chi^2 &lt; \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}</math>  <math>\chi^2 &gt; \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}</math></p>	<b>נדחה את השערת האפס אם:</b>

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

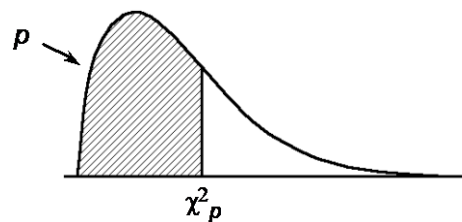
**התפלגות חי בריבוע :**

אם  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  והפרמטר  $\mu$  אינו ידוע מתקיים ש:  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)}$

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.

התפלגות זו תלויה בדרגות החופש. אם  $\mu$  אינו ידוע אז:

$$d.f = n - 1$$

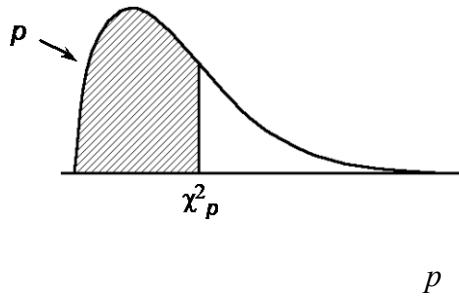


**דוגמה :** (פתרון בהקלטה)

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמאלית עם  $\sigma = 15$ . מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאמריקה. במדגם של 20 ישראלים התקבל :

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420$$

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.005157	0.005982	0.006393	0.00658	0.00675	0.00695	0.00712	0.00727	0.0074	0.00752	0.00763	0.00773
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

**תרגילים:**

1. חברה אורזת סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באריזה מתפלג נורמאלית. החברה החליפה את מכוונות האריזה במטרה לדייק יותר במשקל הנארז. (רוצים שסטיית התקן תהיה קטנה יותר).  
לצורך בדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1008, 1024, 996, 1005, 997.  
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
2. זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו: 38, 72, 90, 110, 50.  
א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית.  
ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נגדיל את רמת המובהקות?  
ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נקטין את רמת המובהקות?  
ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א אם נוסיף תצפית שערכה 70?
3. הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.  
א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.  
ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירת המבחן המתאים הסתמך על המסקנה מסעיף א'.
4. השערות המחקר הן:  $H_0: \sigma^2 = 100$   
 $H_1: \sigma^2 > 100$   
מתכננים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.  
א. מה תהיה עוצמת המבחן אם  $\sigma_1^2 = 150$ ?  
ב. איזו השערה אלטרנטיבית תיתן עוצמה של 90%?
5. השערות המחקר הן:  $H_0: \sigma = 2$   
 $H_1: \sigma < 2$   
במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143. תן הערכה למובהקות התוצאה.

**פתרונות:****שאלה 1**לא נדחה  $H_0$ **שאלה 2**א. נדחה  $H_0$ 

ב. לא תשתנה

ג. לא ניתן לדעת

ד. לא תשתנה

**שאלה 3**א. נדחה  $H_0$ ב. לא נדחה  $H_0$ **שאלה 4**

א. בין 25% ל- 50%

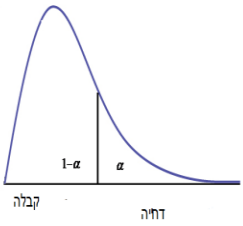
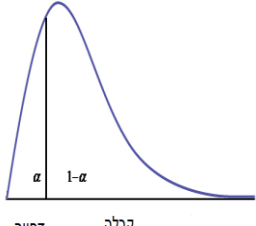
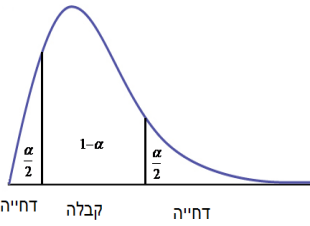
ב. 405.3

**שאלה 5** $0 < P_v < 0.005$



### בדיקת השערות על שתי שונות

**רקע:**

$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$  $H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	<b>השערת האפס :</b> <b>השערה אלטרנטיבית :</b>
$X_1, X_2 \sim N . 2$			<b>תנאים :</b> 1. מדגמים בלתי תלויים
  $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$	  $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$	  או $F \geq f_{1-\alpha/2}^{(n_1-1, n_2-1)}$ $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha/2}^{(n_2-1, n_1-1)}}$	<b>נדחה את השערת האפס אם :</b>

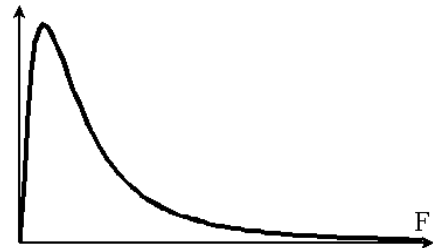
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

**התפלגות F:**

אם  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  ו-  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$  אזי :  $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

כמו כן בהתפלגות F מתקיימת התכונה הבאה :  $F_\alpha(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$



$$df_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1$$

**דוגמה:** (פתרון בהקלטה)

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$$

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונות? מה יש להניח?

טבלת התפלגות  $F$ . ערכי החלוקה  $F_p$  של התפלגות  $F(m, n)$   
 $m$  — דרגות חופש המונה;  $n$  — דרגות חופש המכנה

		$m$											
$p$	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
.95	1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246
.975		648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985
.99		4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6157
.995		16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630
.95	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
.975		38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43
.99		98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43
.995		198.50	199.01	199.16	199.24	199.30	199.33	199.36	199.38	199.39	199.39	199.42	199.43
.95	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
.975		17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25
.99		34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87
.995		55.55	49.80	47.47	46.20	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.68	43.39	43.08
.95	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
.975		12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66
.99		21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20
.995		31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.98	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44
.95	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
.975		10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43
.99		16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72
.995		22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15
.95	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
.975		8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27
.99		13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56
.995		18.63	14.54	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81
.95	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
.975		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57
.99		12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31
.995		16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97
.95	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
.975		7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10
.990		11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52
.995		14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81

$m$ 

$p$	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
.95	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
.975		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77
.99		10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96
.995		13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03
.95	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
.975		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52
.99		10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56
.995		12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47
.95	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
.975		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01
.995		11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72
.95	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
.975		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52
.995		10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07
.95	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20
.975		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50
.95	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01
.975		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01
.95	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84
.975		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35
.995		8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57
.95	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75
.975		5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37
.95	$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67
.975		5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19

**תרגילים :**

1. להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עבור דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 :

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

א. בדוק ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששונויות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע הבדיקה?  
 ב. האם וכיצד הייתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שחלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופיעות במדגם?

2. בתחום הבינוי משתמשים בשני סוגי מתכות : מתכת A ומתכת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכות מבחינת החוזק שלהן. דגמו מספר יחידות מתכת מכל סוג והתקבלו התוצאות הבאות :

B	A	סוג המתכת
10	8	n
30	16	$\sum X_i$
198	60	$\sum X_i^2$

יש להניח שרמת החוזק של המתכות מתפלגת נורמאלית.

א. האם קיים הבדל בין שונויות החוזק של מתכות?  
 ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החוזק של מתכות ?

ככל סעיף רמת מובהקות של 10% .

3. מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמאלית עם תוחלת של 500 ₪ וסטטית תקן של 300 ₪. במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חוסר הטיה לשונויות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000. כמות הסטודנטים שנדגמה 16. במדגם שנעשה על 11 מבוגרים בשנות השלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונויות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונויות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונויות אצל כלל המבוגרים.  
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדולה יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

4. נתון  $X_i \sim N(\mu_x, \sigma^2)$  וכמו כן  $Y_i \sim N(\mu_y, \sigma^2)$

מאוכלוסייה  $X$  נדגמו 7 תצפיות ומאוכלוסייה  $Y$  נדגמו 13 תצפיות.

א. כיצד  $\frac{S_x^2}{S_y^2}$  מתפלג?

ב. מה ההסתברות ש  $S_x^2$  גדולה ביותר מפי 3 מאשר  $S_y^2$ ?

**פתרונות:****שאלה 1**

- א. לא נדחה  $H_0$   
ב. מסקנה לא תשתנה

**שאלה 2**

- א. לא נדחה  $H_0$   
ב. לא נדחה  $H_0$

**שאלה 3**

- א. נדחה  $H_0$   
ב. נדחה  $H_0$

**שאלה 4**

- א.  $F(6,12)$   
ב. 5%

## פרק 20- שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

### שאלות מסכמות בבדיקת השערות על פרמטרים

1. שני חוקרים נתבקשו לבדוק את ההשערות הבאות:

$$H_0 : \mu = 520$$

$$H_1 : \mu > 520$$

כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש-  $\sigma = 20$ .

חוקר א' קבע את כלל ההכרעה לפי  $\alpha = 0.05$ .

חוקר ב' מחליט לדחות  $H_0$  אם  $\bar{X} > 522$ .

א. למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשון קטנה יותר?

ב. מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור  $\mu_1 = 525$ .

ג. הסבר ללא חישוב נוסף, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור  $\mu_1 = 525$ , של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לזו של חוקר ב'.

ד. חוקר א' קיבל במדגם שלו  $\bar{X} = 523$ . מהי מסקנתו?

2. ידוע כי תוחלת מספר ה"לייק"ים היומי של דנה היא 12 עם סטיית תקן 5.

דני טוען שהוא יותר פופולארי מדנה בכך שהוא מקבל יותר "לייק"ים מדנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה "לייק"ים הוא קיבל בכל יום במהלך 7 שבועות (כלומר, ב- 49 ימים) וקיבל סך-הכול 637 "לייק"ים. נניח כי סטיית התקן של מספר ה"לייק"ים שדני מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.

א. מהי רמת המובהקות שכדאי לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בצדקת טענתו (שדני פופולארי יותר בכך שהוא מקבל יותר "לייק"ים מדנה ביום).

ב. אם דני משער שתוחלת מספר ה"לייק"ים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?



3. ברצוננו להשוות בין רשתות A לבין B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשתות. להלן התוצאות:

מוצר	A	B
1	5	5
2	4	5
3	5	3
4	7	4

הניחו כי המחירים מתפלגים נורמלית.  
 אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרמטרי רשמו אותן.  
 א. בדקו האם קיים הבדל בין הרשתות מבחינת תוחלת המחירים. רמת מובהקות של 5%.  
 ב. חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשת מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

4. במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n = 10$$

$$\sum X_i = 1020$$

$$\sum X_i^2 = 105120$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$n = 14$$

$$\sum X_i = 1386$$

$$\sum X_i^2 = 138644$$

נתון שציוני הבחינה מתפלגים נורמלית בכל מדינה.

א. בדוק ברמת מובהקות של 10% האם קיים שוויון שונויות בין אוכלוסיית אמריקה לאוכלוסיית ישראל?  
 ב. בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. ברמת מובהקות של 5%?

5. במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכללות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגמו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמנים נמדדו בדקות:

180	140	171	189	156	176	סטודנטים באוניברסיטאות
150	204	186	191	190	180	סטודנטים במכללות

- א. נסח את ההשערות ובדוק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כלל ההכרעה ואת ההנחות הדרושות לביצוע המבחן הפרמטרי.
- ב. חשב את P-value.
- ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקעה בלימודים במכללות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

6. במדינת טרפפו המשכורות במשק מתפלגות נורמלית עם ממוצע של 1 אלף דולר וסטיית תקן של 0.2 אלף דולר. בוצע מדגם מקרי בו השתתפו 5 נשים ו 5 גברים במדינת שומקום שבה המשכורות מתפלגות נורמאלית גם כן. להלן משכורותיהם באלפי דולר:

1.1	1.2	0.7	0.9	2	גברים
1.2	1.8	1.9	1.1	1.4	נשים

- א. בדוק את הטענה שממוצע משכורותיהם של אזרחי שומקום גבוה מאשר ממוצע משכורותיהם של אזרחי טרפפו ברמת מובהקות של 5%. בהנחה שסטיית התקן זהה בשתי המדינות.
- ב. חזור על הסעיף הקודם ללא ההנחה הנ"ל.
- ג. ישנה טענה שסטיית התקן במדינת שומקום גבוהה מזו של טרפפו. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

7. במטרה להשוות בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים בתוכנית טלוויזיה מסוימת בוצע סקר ובו התקבלו תוצאות הבאות :

לא צופים	צופים	
42	320	נשים
120	72	גברים

- א. האם יש הבדל בין אחוזי הצפייה של גברים ונשים ברמת מובהקות של 1%?
- ב. עבור רמת מובהקות של 5% בדוק טענה שמבין הצופים בתוכנית הטלוויזיה אחוז הנשים גדול פי 2 מאחוז הגברים.
8. בשנת 2000 ל-60% היה מדיח כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם כיום פרופורציית המשפחות עם מדיח כלים עלה. הוחלט לבצע מדגם אקראי של 150 משפחות.
- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה היא מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5% אם במדגם ל-102 משפחות היה מדיח כלים.
- ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם. האם ניתן לדעת את הסתברותה?
9. נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מדגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם. ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.
- א. בדוק ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.
- ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.
- ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

10. להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במדגם של משפחות ישראליות :

4	3	2	1	0	מספר הנסיעות
12	20	26	102	84	מספר המשפחות

בדוק ברמת מובהקות של 5% :

א. באיטליה משפחות נוסעות בממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נוסעות פחות מאשר באיטליה?

ב. בהולנד 80% מהמשפחות נוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנוסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

11. נתון כי :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$$

מעוניינים לבדוק את ההשערות :

$$H_0 : \mu = 40$$

$$H_1 : \mu > 40$$

דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל  $\bar{X} = 45$ .

א. חשבו את P-value (מובהקות התוצאה).

ב. חזור על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה :

$$H_1 : \mu < 40$$

ג. חזור על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה :

$$H_1 : \mu \neq 40$$

12. ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב

התקבלה שונות מדגמית-190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות מדגמית 118.

א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

**פתרונות:****שאלה 1:**

- א. חוקר א
- ב. 0.0122
- ג. גדלה
- ד. נדחה  $H_0$

**שאלה 2:**

- א. לפחות 0.0808
- ב. 0.7995

**שאלה 3:**

- א. לא נדחה  $H_0$
- ב. לא נדחה  $H_0$

**שאלה 4:**

- א. לא נדחה  $H_0$
- ב. לא נדחה  $H_0$

**שאלה 5:**

- א. לא נדחה  $H_0$
- ב. בין 5% ל- 10%
- ג. נדחה  $H_0$

**שאלה 6:**

- א. נדחה  $H_0$
- ב. נדחה  $H_0$
- ג. נדחה  $H_0$

**שאלה 7:**

- א. נדחה  $H_0$
- ב. נדחה  $H_0$

**שאלה 8:**ב. נדחה  $H_0$ 

ג. טעות מסוג ראשון בסיכוי של 0.05

**שאלה 9:**א. לא נדחה  $H_0$ 

ב. 0.8643

ג. 0.8749

**שאלה 10:**א. נדחה  $H_0$ ב. נדחה  $H_0$ **שאלה 11:**

א. 0.0062

ב. 0.9938

ג. 0.0124

**שאלה 12:**א. לא נדחה  $H_0$ ב. לא נדחה  $H_0$